紀伊國屋数学叢書

14–B

戸田宏　三村護

リー群の位相

＜下＞

コンパクト リー群の理論から例外群へ

紀伊國屋書店

まえがき

Lie 群は，微分幾何学，微分トポロジーは勿論，トポロジー，関数解析，代数学等の数学の諸分野にわたって現われる極めて一般的な研究対象である．このLie 群やその等質空間のトポロジーについての諸結果を総合して，一つの案内書にしようというのが本書の目的である．

しかしながら，著者が Lie 群についてそれ程よく知っているわけではない．E. Cartan の研究以来あまりにも日が経ち過ぎたとでもいおうか，門外漢に手っ取り早く必要なことを教えてくれる，恰好な引用書が見当らないのである．トポロジストの必要とするコンパクト Lie 群論は，あたかも Euclid 幾何学の如く，当り前のように見えるものがその実仲々難かしいというのが，いつわらざる所である．また，Lie 環論に深入りしたのでは，著者，読者ともに直観的視野を失ってしまうことになるであろう．

幸いにして，岩沢分解という，その証明は本書ではよくする所のものではないが，便利なものによって，Lie 群はその極大コンパクト部分群と Euclid 空間の直積に同相となる．トポロジーの見地からすれば，Lie 群についてはコンパクト Lie 群を調べれば十分ということになる．

Lie 群の中でも，実用上不可欠なものは古典群である．そして古典群を調べる限りでは，Lie 群論という程のものは必要としない．そこで本書は，まず上巻において古典群に関する部分を詳しく論ずることとし，下巻のコンパクト Lie 群論は例外群のコホモロジーまで到達すれば一応の目的を達したものとした．

上巻においては，古典群を Lie 群の典型的なものとして，その位相的性質を詳細に論じた．下巻では，コンパクト Lie 群の一般的性質，特に例外群について調べる．

第5章では，まずコンパクト群の表現を取り扱い，特にコンパクト Lie 群は適当な古典群の閉部分群と考えられることを示す．次にコンパクト Lie 群論の

特徴である極大トーラスとそれに関する root 系の理論を述べる．ここでは Lie 環の結果を既知のものとして，コンパクト単純 Lie 群の最大階数部分群の分類までが論じられる．

第 6 章で Morse の理論およびそれにつづく Bott-Samelson の理論を述べる．その応用として，コンパクト Lie 群の閉道空間が偶数次数のホモロジー群のみより成るという結果や，例外群の型や次元およびそのホモトピー群の様子が明らかになる．

第 7 章では，Hopf 代数の理論の補足，比較定理と転入定理をまず準備し，分類空間のコホモロジーと Weyl 群に関する一般的結果を述べる．次にコホモロジー作用素の準備の下に，本書独特の方法によって，例外群の mod p コホモロジーを決定する．この章の後半については河野明氏の助言による所が多い．

Lie 群の表現環，Lie 群と等質空間の K-理論については，これらを書く十分な余裕が無くなったので，あとがきに簡単に述べることにした．

本書は Lie 群をトポロジーの視野から眺めたものであり，Lie 群論自体に対してはかなりの独断と偏見のある点は読者の寛容を願うものである．

1978 年　初夏

著　者

目　　次

上巻の内容

第5章　コンパクト Lie 群

この章の目的はコンパクト(連結) Lie 群 G の一般論を述べることである．§1においてコンパクト群上の Haar 積分および関数空間における核作用素を導入した後，これらを用いて§2で有限次元実(または複素)表現の完全可約性および直交(またはユニタリー)表現との同値性を示し，さらに，G は直交群の閉部分群と同型となることを証明する．第1章で古典群について述べた極大トーラスおよび Weyl 群の性質が，実は一般の G についても成り立つことを§3で証明する．例えば極大トーラスの共役性は，位相幾何学で良く知られた「不動点定理」を用いて証明される．§4では随伴表現の極大トーラスへの制限を考えることにより root を定義し，あわせて Weyl 群の作用をも考察する．§5では G の基本群を整格子 $\Gamma(G)=\exp^{-1}(e)$ とその部分群で表わし，さらに，Lie 環の分解を用いることにより G の分解を与える．§6では単純群 G の単純 root の系に Dynkin 図式を対応させ，それを分類することにより，G (の局所同型類)を分類する．§7で単純 root と dominant root を調べることにより，G と同じ階数を持つ部分群の型がすべて明らかになる．

§1　コンパクト群上の積分

不変積分

本章では，コンパクトな位相群を単に**コンパクト群**ということにする．

定義　コンパクト群 G 上の**不変積分**または **Haar 積分**

$$\int f dx=\int f(x)dx=\int_G f(x)dx=\int_{x\in G} f(x)dx$$

は，G 上の実数値連続関数 $f:G\to \boldsymbol{R}$ に実数値 $\int f(x)dx\in\boldsymbol{R}$ を対応させ，

次の条件 (1)〜(4) をみたすもののことである：

(1) $\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx \qquad (c\in \boldsymbol{R})$$

(2) $f(x)\geqq 0\ (\forall x\in G) \Longrightarrow \int f(x)dx\geqq 0$

(3) $f(x)=1\ (\forall x\in G) \Longrightarrow \int f(x)dx=1$

(4) 任意の $y\in G$ について，$\int f(xy)dx=\int f(x)dx.$

定理 1.1　コンパクト群 G が第2可算公理をみたすならば，G 上の不変積分は存在して一意的である．また，この不変積分は (1)〜(4) の外に次もみたす：

(2)′ $f(x)\geqq 0\ (\forall x\in G)$，$f\neq 0 \Longrightarrow \int f(x)dx>0$

(5) 任意の $y\in G$ について，$\int f(yx)dx=\int f(x)dx.$

(6) $\int f(x^{-1})dx=\int f(x)dx$

$A=\{a_1, \cdots, a_n\}$ を G の有限部分集合とするとき，$f(x)$ の A に関する平均 $M(A, f(x))=(f(xa_1)+\cdots+f(xa_n))/n$ のある意味の極限として，$\int f(x)dx$ がえられる．即ち，任意の $\varepsilon>0$ に対して，有限集合 A が存在して

$$|M(A, f(y))-\int f(x)dx|<\varepsilon \quad (\forall y\in G)$$

をみたす実数値として $\int f(x)dx$ が特徴づけられる．定理の証明の詳細は Pontrjagin "Topological group" [37] 第4章を参照されたい．

性質 (1), (2), (2)′ は通常の積分の性質である．これらから容易に，

(1.2) $f(x)\geqq g(x) \Longrightarrow \int f(x)dx\geqq \int g(x)dx$

$$|\int f(x)dx|\leqq \int |f(x)|dx \leqq \mathrm{Sup}\{|f(x)| \mid x\in G\}$$

定理 1.3　G は第2可算公理をみたすコンパクト群，Y は位相空間，$f: G\times Y\longrightarrow \boldsymbol{R}$ は連続とするとき，写像

$$F: Y\longrightarrow \boldsymbol{R} \Longleftrightarrow F(y)=\int f(x, y)dx$$

は連続である．

さらに，$Y=\boldsymbol{R}$ のとき，微分 $\dfrac{d}{dt}f : G\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ が存在して連続であれば，

$$\frac{d}{dt}F(t)=\int\frac{d}{dt}f(x,t)dx$$

［証明］ $\varepsilon>0$, $y_0\in Y$ を考える．G のコンパクト性を用いて，

$$y\in U\Longrightarrow|f(x,y)-f(x,y_0)|<\varepsilon\quad(\forall x\in G)$$

をみたす y_0 の近傍 U の存在がわかる．そのとき，(1.2)によって，

$$|F(y)-F(y_0)|=\left|\int(f(x,y)-f(x,y_0))dx\right|<\varepsilon$$

これは，F の連続性を示している．

後半については，$t\in\boldsymbol{R}$ を固定し，$0\neq s\in\boldsymbol{R}$ を考えると，$(1/s)(f(x,t+s)-f(x,t))=\dfrac{d}{dt}f(x,t+\theta s)$ となる $\theta=\theta(x)$, $0<\theta<1$, がある．$\dfrac{d}{dt}f$ は $G\times\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合上で一様収束するから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ が存在して，

$$0<|s|<\delta\Longrightarrow\left|\frac{f(x,t+s)-f(x,t)}{s}-\frac{d}{dt}f(x,t)\right|<\varepsilon\quad(\forall x\in G)$$

これを，積分して，$\left|\dfrac{F(t+s)-F(t)}{s}-\displaystyle\int\frac{d}{dt}f(x,t)dx\right|<\varepsilon$

$$\Longrightarrow\frac{d}{dt}F(t)=\int\frac{d}{dt}f(x,t)dx$$
（終）

系 1.4　$f : G\times\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ において，$\boldsymbol{R}^n$ の変数 $t_1,\cdots,t_n$ に関するすべての（高次）偏微分が存在して $G\times\boldsymbol{R}^n$ 上の連続関数であれば，$F(t_1,\cdots,t_n)=\displaystyle\int f(x,t_1,\cdots,t_n)dx$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の実数値 C^∞-関数である．

定理 1.5　G および H は第2可算公理をみたすコンパクト群，$f : G\times H\to\boldsymbol{R}$ を連続関数とするとき，

$$\int\left(\int f(x,y)dy\right)dx=\int\left(\int f(x,y)dx\right)dy\quad\left(\text{単に }\iint f(x,y)dxdy\text{ と書く．}\right)$$

［証明］ 定理1.3により，この両辺は定義され，しかも $G\times H$ 上の不変積分の条件をみたしている．定理1.1の不変積分の一意性から，両辺は等しい．

（終）

f がベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上に値をとるときも，成分毎の積分により，

$$\int f(x)dx\in\boldsymbol{R}^n\quad(f : G\longrightarrow\boldsymbol{R}^n)$$

が定義され，上の議論をそのまま適用することができる．積分の線型性より，

(1.6)　線型写像 $T: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ に対して，

$$\int T(f(x))dx = T\left(\int f(x)dx\right)$$

また，複素数に値をとるとき，$f: G \to \boldsymbol{C}$（または $\boldsymbol{C}^n$）についても同様である．

コンパクト群上の関数空間

記号　$V = V(G) = \{f: G \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ (連続)$\}$

$\boldsymbol{R}^n$ のベクトル空間の構造によって，V は $\boldsymbol{R}$ 上の（無限次元）ベクトル空間となる．G はコンパクトであるから，各 f の値は有界である．

定義　V の部分集合 A について，

A は**一様有界** $\Longleftrightarrow$ $M>0$ が存在して，$f \in A$, $x \in G$ ならば $\|f(x)\| < M$.

A は**同等連続関数**の集合 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\varepsilon>0$ に対して，G の単位元 e の近傍 U があって，$f \in A$, $x \in G$, $y \in U$ ならば $\|f(xy)-f(x)\| < \varepsilon$.

補題 1.7　V の関数列 $\{f_n\}$ が同等連続関数の一様有界集合 A に属しているとき，G 上で一様収束する部分列 $\{f_{n_k}\}$ を選び出すことができる．

［証明］　まず，正整数 k に対して，A の部分集合 A_k で，$f, g \in A_k$ について，$\|f(x)-g(x)\| < 1/k$ $(\forall x \in G) \Longrightarrow f = g$, をみたすものを考えると，$A_k$ は有限集合であることを示そう．A の同等連続性から，e の近傍 U があって，$f \in A$, $x \in G$, $y \in U \Longrightarrow \|f(xy)-f(x)\| < 1/6k$.　G はコンパクト $\Longrightarrow G = \bigcup_{i=1}^{N} x_i U$ となる $x_1, \cdots, x_N \in G$ がある．$D = \{(f, g) \mid f, g \in A_k,\ f \neq g\}$ とおく．$(f, g) \in D$ に対して，$\|f(z)-g(z)\| \geq 1/k$ となる $z \in G$ があるから，この z が $z \in x_i U$ となるような (f, g) の全体を D_i とすれば，$D = \cup D_i$.　$\{f(x_i) \mid f \in A\}$ は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合に含まれるから，A の有限部分集合 B_i がとれて，任意の $f \in A$ に対して，$\|f(x_i)-h_f(x_i)\| < 1/6k$ となる $h_f \in B_i$ がある．

いま，D_i が B_i の個数の2乗以上の元を含むと仮定すれば，$h_f = h_g = h \in B_i$ となる $(f, g) \in D_i$ がある．上の z は $z = x_i y, y \in U$，と書けるから，

$$\|f(z)-h(z)\| \leq \|f(x_i y)-f(x_i)\| + \|f(x_i)-h(x_i)\| + \|h(x_i y)-h(x_i)\| < 1/2k$$

同様に，$\|g(z)-h(z)\| < 1/2k$.　よって $\|f(z)-g(z)\| < 1/k$ という矛盾をうる．従って，D_i は有限 $\Longrightarrow D = \bigcup_{i=1}^{N} D_i$ は有限 $\Longrightarrow A_k$ は有限．

さて，このような A_k で包含関係について極大なものを改めて A_k とする．A_k は次の性質をもつ：任意の $f\in A$ に対して，$\|f(x)-g(x)\|<1/k\ (\forall x\in G)$ をみたす $g\in A_k$ が存在する．A_k は有限であるから，任意の A の関数列 $\{h_n\}$ に対し，少くとも１つの $g_k\in A_k$ について，$\|h_n(x)-g_k(x)\|<1/k\ (\forall x\in G)$ をみたす n が無限個あり，そのような n によって，$\{h_n\}$ の部分列 $\{h_m'\}$ が選べる．この操作を与えられた関数列 $\{f_n\}$ から順次 $A_1, A_2, \cdots$ に対して行なって，部分列の系列 $\{f_n^{(k)}\}$ で $\|f_n^{(k)}(x)-g_k(x)\|<1/k$ をみたすものがとれる．

$f_n^*=f_n^{(n)}$ とおけば，$\{f_n^*\}$ は $\{f_n\}$ の部分列で，

$$m, n\geq k \Longrightarrow \|f_m^*(x)-f_n^*(x)\|\leq\|f_m^*(x)-g_k(x)\|+\|f_n^*(x)-g_k(x)\|<2/k$$

従って，$\{f_n^*\}$ は一様収束する部分列である．　(終)

V における内積 $\langle\ ,\ \rangle : V\times V\longrightarrow \boldsymbol{R}$ を

$$\langle f, g\rangle=\int (f(x), g(x))dx \qquad (f, g : G\longrightarrow \boldsymbol{R}^n)$$

で定義する．ここで，$(f(x), g(x))=f(x)\cdot {}^t g(x)$ は $\boldsymbol{R}^n$ における内積．明らかに，次が成り立って V は計量ベクトル空間となる．

(1.8)　(1)　$\langle a_1f_1+a_2f_2, g\rangle=a_1\langle f_1, g\rangle+a_2\langle f_2, g\rangle \quad (a_1, a_2\in\boldsymbol{R})$

(2)　$\langle g, f\rangle=\langle f, g\rangle$

(3)　$\langle f, f\rangle\geq 0,\quad f\neq 0\Longrightarrow\langle f, f\rangle>0$

$\|f\|=\sqrt{\langle f, f\rangle}\geq 0$ を f の**ノルム**という．通常の方法によって，

(4)　$|\langle f, g\rangle|\leq\|f\|\cdot\|g\|, \qquad \|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$

(5)　$\int\|f(x)\|dx\leq\|f\|$

以上の議論は，$\boldsymbol{C}$ 上の場合 $V=\{f : G\to\boldsymbol{C}^n\ (\text{連続})\}$ について成り立つことに注意する．ただし，(1.8) (2)は次の形になる：

(2)′　$\langle g, f\rangle=\overline{\langle f, g\rangle}$

作用素と固有関数

定義　$K : V\longrightarrow V$ は**作用素** $\Longleftrightarrow$ K は線型かつ連続．

$K\varphi=\lambda\varphi,\ \lambda\in\boldsymbol{R},\ \varphi\neq 0$ のとき，$\varphi\in V$ は K の**固有関数**，λ を φ の**固有値**という．また，$\{f\in V\,|\,Kf=\lambda f\}$ を λ に関する**固有空間**という．

$K : V\longrightarrow V$ は**特殊作用素** $\Longleftrightarrow$ K は次をみたす作用素：

(1.9) (1) K は集合 $\{f\in V \mid \|f\|\leq 1\}$ を V の一様有界かつ同等連続関数の集合に写す.

(2) $\langle Kf, g\rangle=\langle f, Kg\rangle,\quad f, g\in V$

定義 対称な連続関数 $k: G\times G\longrightarrow \boldsymbol{R},\quad k(x, y)=k(y, x)$, について,

$$K: V\longrightarrow V \Longleftrightarrow (Kf)(x)=\int k(x, y)f(y)dy$$

を, k を**核関数**とする**核作用素**という.

定理 1.3 と定理 1.1, G のコンパクト性と(1.2), 定理 1.5 と k の対称性, を使えば次がえられる.

(1.10) 核作用素は特殊作用素である.

補題 1.11 特殊作用素 K は固有関数をもつ. 実際 $c=\mathrm{Sup}\{\|Kf\| \mid \|f\|=1\}$ または $-c$ は固有値で, 任意の固有値 λ は $|\lambda|\leq c$ をみたす.

[証明] $c'=\mathrm{Sup}\{|\langle Kf,f\rangle| \mid \|f\|=1\}$ とおけば, 任意の固有値 λ は $|\lambda|\leq c'$ をみたす. $\|f\|=1 \Longrightarrow |\langle Kf, f\rangle|\leq\|Kf\|\cdot\|f\|\leq c$ であるから, $c'\leq c$.

明らかに, $f\in V$ について, $|\langle Kf,f\rangle|\leq c'\|f\|^2$ であるから,

$$c'\|f+g\|^2\geq\langle K(f+g), f+g\rangle=\langle Kf,f\rangle+2\langle Kf, g\rangle+\langle Kg, g\rangle$$

$$-c'\|f-g\|^2\leq\langle K(f-g), f-g\rangle=\langle Kf,f\rangle-2\langle Kf, g\rangle+\langle Kg, g\rangle$$

よって, $\|f\|=\|g\|=1$ とするとき, $4\langle Kf, g\rangle\leq c'\|f+g\|^2+c'\|f-g\|^2=2c'(\|f\|^2+\|g\|^2)=4c' \Longrightarrow \langle Kf, g\rangle\leq c'$. $Kf\neq 0$ のときは, $g=Kf/\|Kf\|$ とおいて, $\|Kf\|\leq c'$. $Kf=0$ のときも, $\|Kf\|=0\leq c'$. 以上のことから, $c\leq c'$, 従って, $c=c'$ であることがわかる.

$c=c'=0$ のときは, つねに $Kf=0$ で, 0 が固有値である.

$c=c'\neq 0$ とする. c' の定義から, $\langle Kf_i,f_i\rangle$ が $\lambda=\pm c$ に収束する関数列 $\{f_i, \|f_i\|=1\}$ がある. 補題 1.7 によって, $\{Kf_i\}$ が $\varphi\in V$ に一様収束するように $\{f_i\}$ をとり直すことができる.

$$0\leq\|Kf_i-\lambda f_i\|^2=\|Kf_i\|^2+\lambda^2\|f_i\|-2\lambda\langle Kf_i,f_i\rangle \longrightarrow \|\varphi\|^2-\lambda^2$$

であるから, $\|\varphi\|^2\geq\lambda^2>0 \Longrightarrow \varphi\neq 0$ である. 一方, $\|Kf_i\|\leq c'=c=|\lambda|$ であるから, $\|Kf_i-\lambda f_i\|^2\leq 2\lambda^2-2\lambda\langle Kf_i,f_i\rangle \Longrightarrow \lim\|Kf_i-\lambda f_i\|=0 \Longrightarrow \lim\|K(Kf_i)-\lambda(Kf_i)\|=\lim\|K(Kf_i-\lambda f_i)\|=0 \Longrightarrow \|K\varphi-\lambda\varphi\|=0 \Longrightarrow K\varphi=\lambda\varphi$. (終)

定理 1.12 特殊(特に, 核)作用素 K に関する固有関数と固有値について, 次

が成り立つ：

(1)　異なる固有値をもつ固有関数 φ, φ' は直交する：$\langle\varphi, \varphi'\rangle=0$.

(2)　任意の $c>0$ に対して，$|\lambda|\geq c$ となる固有値 λ は有限である．

(3)　$\lambda\neq 0$ に対して，λ に関する固有空間は有限次元ベクトル空間をなす．

(4)　$\{\varphi_i\}$ を 0 でない固有値をもつ固有関数の正規直交系 ($\langle\varphi_i, \varphi_j\rangle=\delta_{ij}$) で極大なものとすれば，$\{\varphi_i\}$ は可算であり，任意の $f\in V$ に対して，(Fourier) 級数 $\sum_i\langle Kf, \varphi_i\rangle\varphi_i$ は Kf に一様収束する．

［証明］(1)　固有関数 φ, φ' の固有値を λ, λ' とするとき，(1.9) (2) より，

$$\lambda\langle\varphi, \varphi'\rangle=\langle\lambda\varphi, \varphi'\rangle=\langle K\varphi, \varphi'\rangle=\langle\varphi, K\varphi'\rangle=\langle\varphi, \lambda'\varphi'\rangle=\lambda'\langle\varphi, \varphi'\rangle$$

よって，$\lambda\neq\lambda'$ ならば $\langle\varphi, \varphi'\rangle=0$.

(2)　$|\lambda_i|\geq c$ をみたす固有値 $\{\lambda_i\}$ で相異なるものを考え，λ_i をもつ固有関数 φ_i で $\|\varphi_i\|=1$ となるものを 1 つづつとる．(1) より，$i\neq j$ について，

$$\|K\varphi_i-K\varphi_j\|^2=\langle\lambda_i\varphi_i-\lambda_j\varphi_j,\ \lambda_i\varphi_i-\lambda_j\varphi_j\rangle=\lambda_i{}^2+\lambda_j{}^2\geq 2c^2$$

よって，$\|K\varphi_i(x)-K\varphi_j(x)\|\geq\sqrt{2}c$ となる $x\in G$ がある．$\sqrt{2}c>1/k$ に対して，$A_k=\{K\varphi_i\}$ を考えると，(1.9) (1) により A_k は一様有界，同等連続であるから，補題 1.7 の証明の前半より，A_k は有限集合である．よって，(1) より (2) をうる．

(3)　λ を固有値にもつ固有関数全体と 0 は明らかに V の部分ベクトル空間をなす．その中から，正規直交系 $\{\varphi_i\}$ を選び，(2) の議論を適用すれば，$\{\varphi_i\}$ は有限でなければならない．これは (3) を示している．

(4)　(2), (3) $\Longrightarrow\{\varphi_i\}$：可算．次の Bessel の不等式を示す．

(＊)　任意の $f\in V$ について，$\sum_i\langle f, \varphi_i\rangle^2$ は収束して，その和 $\leq\|f\|^2$.

$f_k=f-\sum_{i\leq k}\langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i$ とおく．明らかに，$j\leq k\Longrightarrow\langle f_k, \varphi_j\rangle=0$. よって，

$$\|f\|^2=\|f_k+\sum_{i\leq k}\langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i\|^2=\|f_k\|^2+\sum_{i\leq k}\langle f, \varphi_i\rangle^2$$

故に，$\sum_i\langle f, \varphi_i\rangle^2$ は有界で，ある値 $\leq\|f\|^2$ で収束する．

φ_i の固有値を $\lambda_i\neq 0$ とすると，

$$\langle Kf, \varphi_i\rangle\varphi_i=\langle f, K\varphi_i\rangle\varphi_i=\lambda_i\langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i=K(\langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i)$$

(1.9) (1) により，$M>0$ が存在して，$\|f\|=1$, $x\in G$ ならば $\|Kf(x)\|<M$.
故に，任意の $f\in V$, $x\in G$ について，$\|Kf(x)\|\leq M\|f\|$.

部分和 $\sum_{i=n}^{m}\langle f, \varphi_i\rangle\varphi_i\in V$ を考える．$\|\sum c_i\varphi_i\|=(\sum|c_i|^2)^{1/2}$ であるから，

$$\|\sum_{i=n}^{m}\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i(x)\|\leq M\|\sum_{i=n}^{m}\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i\|=M(\sum_{i=n}^{m}\langle f,\varphi_i\rangle^2)^{1/2}$$

(∗)によって，$n, m\to\infty$ のとき右辺は0に収束する．従って，$\sum_i\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i$ は一様収束する．この和が Kf であることを示せばよい．

$$K_mf=Kf-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\langle f,\varphi_i\rangle\varphi_i=Kf-\sum_{i=1}^{m}\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i$$

とおけば，K_m が特殊作用素であることは容易にわかる．

$1\leq j\leq m$ のとき，

$$\langle K_mf,\varphi_j\rangle=\langle Kf,\varphi_j\rangle-\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle=\langle f,K\varphi_j-\lambda_j\varphi_j\rangle=0$$

いま，φ が固有値 $\lambda\neq 0$ をもつ K_m の固有関数とすれば，上の式から，

$$\langle\varphi,\varphi_j\rangle=0\quad(1\leq j\leq m)\quad かつ\quad \lambda\varphi=K_m\varphi=K\varphi$$

となり，φ は K の固有関数，従って，φ は λ を固有値にもつ φ_i の一次結合で

$$\varphi=\sum_{\lambda_i=\lambda}\langle\varphi,\varphi_i\rangle\varphi_i=\sum_{\lambda_i=\lambda,\, i>m}\langle\varphi,\varphi_i\rangle\varphi_i$$

$\varepsilon>0$ に対して，$|\lambda_i|\geq\varepsilon$ となる i は(2)により有限であるから，m を十分大にとると，K_m の固有値 λ は，上の議論によって，$|\lambda|<\varepsilon$ をみたすことがわかる．補題 1.11 によれば，任意の $f\in V$ について，$\|K_mf\|<\varepsilon\|f\|$ である．即ち，$\lim\|K_mf\|=0$．一方，$Kf=K_mf+\sum_{i=1}^{m}\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i$ であるから，

$$Kf=\lim\sum_{i=1}^{m}\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i=\sum_i\langle Kf,\varphi_i\rangle\varphi_i \qquad (終)$$

以上の議論は，$\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{C}$ でおきかえても，適当に読み替えて成り立つ．

多様体上の不変 Riemann 計量

定義 多様体 M が **Riemann 計量** g をもつ

$\Longleftrightarrow$ g は T_xM に内積(正定値，実対称2次形式)を与え，x に関して C^∞.

M の局所座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ に関して，

$$g(dx^i, dx^j)=g_{ij}(x)\qquad (dx^i, dx^j\in T_xM)$$

と書け，$(g_{ij}(x))$ は正定値対称行列で，x に関して C^∞-関数である．

定理 1.13 (1) 任意の(パラコンパクト微分)多様体は Riemann 計量をもつ．

(2) 多様体 M にコンパクト (Lie) 群 K が左(または右)から作用しているとき，M は K の作用で不変な Riemann 計量をもつ．

(3) K, H をコンパクト (Lie) 群とする．多様体 M に K が左から，H が右から作用し，$(k\cdot x)\cdot h=k\cdot(x\cdot h)$ ($k\in K$, $h\in H$, $x\in M$) がつねにみたされてい

るとき，K および H の作用で不変な M の Riemann 計量がある．特に，コンパクト Lie 群 G はそれ自身の左および右作用で不変な Riemann 計量をもつ．

［証明］ (1) $m=\dim M$, $F'=\{A\in M(m, \boldsymbol{R})\mid A={}^tA\}\supset F=\{A\in F'\mid$ 正定値$\}$ とする．$P\in GL(m, \boldsymbol{R})$ は F' および F に $A\cdot P=PA{}^tP$ よって作用する．

いま，$\zeta=(E, p, M, F, GL(m, \boldsymbol{R}))$ を M の接バンドル TM の同伴ファイバーバンドルとするとき，次は明らかであろう：

(1.14) M の Riemann 計量 g は ζ における切断 $g: M\to E$ と同一視できる．

F' は $\boldsymbol{R}$ 上 $m(m+1)/2$ 次元線型空間である．$A, B\in F$ とすると，任意の 0 でない $\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^m$ について，$\boldsymbol{v}A{}^t\boldsymbol{v}>0$, $\boldsymbol{v}B{}^t\boldsymbol{v}>0$ であるから，$0\leq\theta\leq 1$ について，$\boldsymbol{v}(\theta A+(1-\theta)B){}^t\boldsymbol{v}>0$. これは $\theta A+(1-\theta)B\in F$ を示しているから，F は F' の中の凸集合である．また明らかに，F は F' の開集合である．以上のことから，F は $\boldsymbol{R}^{m(m+1)/2}$ に同相であることがわかる．第2章補題2.7によって，ζ は切断をもつ．(1.14)により M は Riemann 計量をもつ．

(2) M の1つの Riemann 計量 $g_0(x)$ について，$g_0(k\cdot x)$, $k\in K$, も Riemann 計量であり，K 上の不変積分 $g(x)=\int_K g_0(k\cdot x)dk$ を考えれば，$g(x)$ は K の作用で不変な Riemann 計量である．(ここで，F が凸であることから $g_0(k\cdot x)\in F\Longrightarrow g(x)\in F$ がいえる．) 右作用についても同様．

(3) H の右作用で不変な Riemann 計量について (2) の操作を施せばよい．

(終)

定義 Riemann 計量の指定された多様体を **Riemann 多様体**という．

Riemann 多様体の変換で，Riemann 計量を変えないものを**等長変換**という．

定理1.13の(2)，(3)のような Riemann 多様体 (の Riemann 計量) はそれぞれ **K-不変**，**K-H-不変**であるという．特に，Lie 群 G の Riemann 計量が G の積による作用について G-G-不変であるとき，単に**不変 Riemann 計量**という．

M の Riemann 計量が K-不変 $\Longleftrightarrow$ K の作用 L_k (または R_k) は等長変換．

§2 コンパクト群の表現

コンパクト群の有限次元表現

定理 2.1 Gをコンパクト群とする．Gの有限次元実ベクトル空間上の表現は直交表現と同値である．また，Gの有限次元複素ベクトル空間上の表現はユニタリー表現と同値である．

［証明］ 表現空間をVとする．$V=\boldsymbol{R}^n$または$V=\boldsymbol{C}^n$としてよい．

$V=\boldsymbol{R}^n$とし，Gの作用を$(x, \boldsymbol{v})\mapsto x\boldsymbol{v}$と表わす．$\boldsymbol{R}^n$における内積を$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{v}$で表わすとき，新しい内積を

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})=\int_G (x\boldsymbol{u})\cdot(x\boldsymbol{v})dx$$

で定義する．この$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$は明らかに，双一次かつ対称であり，$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}\Longrightarrow x\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}\Longrightarrow(x\boldsymbol{u})\cdot(x\boldsymbol{u})>0$であるから，

$$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}\Longrightarrow(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})=\int_G (x\boldsymbol{u})\cdot(x\boldsymbol{u})dx>0$$

即ち，正定値である．さらに，$y\in G$に対して，不変積分の性質により，

$$(y\boldsymbol{u}, y\boldsymbol{v})=\int_G (xy\boldsymbol{u})\cdot(xy\boldsymbol{v})dx=\int_G (x\boldsymbol{u})\cdot(x\boldsymbol{v})dx=(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

Vの基底を，この内積 $(\ ,\ )$ に関する正規直交基底でおきかえると，Gの作用は直交変換である．これは，Gの作用が直交表現と同値であることを示している．

$V=\boldsymbol{C}^n$の場合は，$\boldsymbol{C}^n$の内積$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^*$について同様にすればよい． （終）

直交(ユニタリー)表現において，G-不変部分空間の直交補空間もまたG-不変である(第1章定理2.11)から，次の系がえられる．

系 2.2 コンパクト群の有限次元実(または複素)表現は完全可約である．

関数空間によるコンパクト群の表現

前§の記号 $V=\{f:G\longrightarrow\boldsymbol{R}^n\}$ を用いる．

定義 $f\in V$，$y\in G$および線型変換$A:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^n$について，

$$R_y : V\longrightarrow V \Longleftrightarrow (R_y f)(x)=f(xy)$$
$$L_y : V\longrightarrow V \Longleftrightarrow (L_y f)(x)=f(y^{-1}x)$$
$$A\ : V\longrightarrow V \Longleftrightarrow A(f)(x)=A(f(x))$$

明らかに，

(2.3)　(1)　R_y，L_y，A は線型変換．

$$R_y \circ L_{y'} = L_{y'} \circ R_y,\quad A \circ R_y = R_y \circ A,\quad A \circ L_y = L_y \circ A$$

(2)　$R_x R_y = R_{xy}$，　$L_x L_y = L_{xy}$　$(x, y \in G)$

従って，R, L は G の V 上の表現である．

作用素 K は次の条件をみたす核関数 k から作られる核作用素とする．

(2.4)　$h(x) = h(x^{-1})$ をみたす関数 $h : G \to \boldsymbol{R}$ があって，

$$k(x, y) = h(xy^{-1})$$

補題 2.5　(1)　任意の $y \in G$ について，$R_y \circ K = K \circ R_y$.

(2)　h が $h(yxy^{-1}) = h(x)$ $(\forall x \in G)$ をみたせば，$L_y \circ K = K \circ L_y$.

(3)　任意の線型変換 A について，$A \circ K = K \circ A$.

［証明］　(1)　$$K(R_y f)(x) = \int h(xz^{-1}) f(zy) dz = \int h(xy(zy)^{-1}) f(zy) dz$$
$$= \int h((xy)z^{-1}) f(z) dz = (Kf)(xy) = R_y(Kf)(x)$$

(2)　$$K(L_y f)(x) = \int h(xz^{-1}) f(y^{-1}z) dz = \int h(yy^{-1}x(y^{-1}z)^{-1}y^{-1}) f(y^{-1}z) dz$$
$$= \int h(yy^{-1}xz^{-1}y^{-1}) f(z) dz = \int h(y^{-1}xz^{-1}) f(z) dz$$
$$= (Kf)(y^{-1}x) = L_y(Kf)(x)$$

(3)　$$K(Af)(x) = \int h(xz^{-1}) A(f(z)) dz = A \int h(xz^{-1}) f(z) dz = A(Kf)(x)$$

（終）

系 2.6　R_y および A は 1 つの固有値に関する固有空間をそれ自身に写す．h が $h(yxy^{-1}) = h(x)$ をみたせば L_y についても同様．

［証明］　$K\varphi = \lambda\varphi \Longrightarrow K(R_y\varphi) = R_y(K\varphi) = R_y(\lambda\varphi) = \lambda(R_y\varphi)$

他も同様．　（終）

記号　$c > 0$ について，

$V_c =$ ($|\lambda| \geq c$ をみたす固有値 λ に属する K の固有関数で張られる部分空間)

$= \sum$($|\lambda| \geq c$ をみたす λ に関する固有空間)

$V_c^{\perp} = \{g \in V \mid \langle g, f \rangle = 0,\ \forall f \in V_c\}$

定理 1.12 によって，V_c は有限次元で，固有関数より成る正規直交基底 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_r\}$ をもつ.

$$P_c:\ V \longrightarrow V_c \Longleftrightarrow P_c(f)=\sum_{i=1}^{r} \langle f, \varphi_i \rangle \varphi_i$$

と定義することにより，P_c は

$$P_c(V_c{}^{\perp})=0, \qquad P_c | V_c = id, \qquad P_c \circ P_c = P_c$$

をみたす射影であり，$f=P_c f \oplus (f-P_c f)$ によって，直和分解

$$V=V_c \oplus V_c{}^{\perp}$$

がえられる.

補題 2.7 $c>0$ について，上の射影 P_c は R_y, A と可換．さらに，(2.4)の h が $h(yxy^{-1})=h(x)$ をみたすならば L_y とも P_c は可換である：

$$P_c \circ R_y = R_y \circ P_c, \quad P_c \circ A = A \circ P_c, \quad P_c \circ L_y = L_y \circ P_c$$

これらの R_y, A, L_y は V_c を V_c へ，$V_c{}^{\perp}$ を $V_c{}^{\perp}$ へ写す.

［証明］ 系 2.6 により，$R_y(V_c) \subset V_c$．いま $R_y(V_c{}^{\perp}) \subset V_c{}^{\perp}$ を仮定すると，

$$R_y P_c f + R_y(f-P_c f) = R_y f = P_c R_y f + (R_y f - P_c R_y f)$$

において，$R_y P_c f$, $P_c R_y f \in V_c$ および $R_y(f-P_c f)$, $R_y f - P_c R_y f \in V_c{}^{\perp}$．直和分解の一意性より，$R_y P_c f = P_c R_y f$．$R_y(V_c{}^{\perp}) \subset V_c{}^{\perp}$ は次の (2.7)′ の第 1 式からえられる．A, L_y についても (2.7)′ の残りの式と系 2.6 より補題をうる.

(2.7)′ $\quad \langle R_y g, f \rangle = \langle g, R_{y^{-1}} f \rangle, \quad \langle L_y g, f \rangle = \langle g, L_{y^{-1}} f \rangle$

$\quad \langle Ag, f \rangle = \langle g, {}^t\!Af \rangle$

ただし，${}^t\!A$ は A の転置（行例の転置に対応する）.

第 1 式は，$\langle R_y g, f \rangle = \int (g(xy), f(x))\,dx = \int (g(xy), f((xy)y^{-1}))dx$
$= \int (g(x),\ f(xy^{-1}))dx = \langle g, R_{y^{-1}} \rangle$．他も同様. （終）

閉部分群の表現の拡張

補題 2.8 コンパクト群 G の単位元 e の任意の近傍 U に対して，次の条件をみたす連続関数 $h: G \to \boldsymbol{R}$ が存在する：

$$h(x) \geq 0 \quad (x \in G), \quad h(e)=1, \quad x \notin U \Longrightarrow h(x)=0,$$
$$h(x)=h(x^{-1}) \quad (x \in G), \quad h(yxy^{-1})=h(x) \quad (x, y \in G)$$

［証明］ U をそれに含まれる近傍でおきかえてもよい．G はコンパクトであ

ることと $A(g,u)=gug^{-1}$ の連続性から，$\cap gUg^{-1}$ も e の近傍であることがわかる．U をこれでおきかえると $gUg^{-1}=U$ $(\forall g\in G)$ をみたす．さらに $U\cap U^{-1}$ を考えて，$U=U^{-1}$ としてよいことがわかる．

G は正規空間であるから，連続関数 $r: G\to\boldsymbol{R}$ で，

$$r(x)\geq 0 \quad (x\in G), \quad r(e)=1, \quad x\notin U\Longrightarrow r(x)=0$$

をみたすものがある．このとき，

$$h(x)=\frac{1}{2}\int_G (r(zxz^{-1})+r(zx^{-1}z^{-1}))dz$$

とおけば，補題の性質は容易に確かめられる．　(終)

以下の議論において，作用素 K は，適当に小さくとった近傍 U に関して，補題 2.8 の連続関数 h から定義されるものとする：

$$(Kf)(x)=\int_G h(xy^{-1})f(y)dy$$

射影 $P_c: V\to V_c$ はこの K と $c>0$ に関するものである．

補題 2.9　コンパクト群 G の閉部分群 H の表現 $\rho: H\to GL(n,\boldsymbol{R})$ が与えられているとき，$c>0$ と連続関数 $f: G\to\boldsymbol{R}^n$ で，

$$f\in V_c, \quad f(e)\neq\boldsymbol{0}, \quad f(yx)=\rho(y)f(x) \quad (y\in H,\ x\in G)$$

をみたすものが存在する．

［証明］　単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)\in\boldsymbol{R}^n$ について，

$$g_1: H\longrightarrow\boldsymbol{R}^n \Longleftrightarrow g_1(y)=\rho(y)\cdot\boldsymbol{e}_1 \quad (y\in H)$$

は連続，G はコンパクト Hausdorff 空間，H はその閉集合であるから，Tietze の定理によって，g_1 は $g_2: G\to\boldsymbol{R}^n$，$g_2|H=g_1$，に拡張できる．

$$g: G\longrightarrow\boldsymbol{R}^n \Longleftrightarrow g(x)=\int_H \rho(y^{-1})g_2(yx)dy \quad (x\in G)$$

は連続写像である．g_1 は $g_1(yy')=\rho(y)g_1(y')$ $(y,y'\in H)$ をみたすから，

$$z\in H \Longrightarrow g(z)=\int_H \rho(y^{-1})g_1(yz)dy=\int_H g_1(z)dy=g_1(z)$$

即ち，g も g_1 の拡張である．さらに，任意の $x\in G$ と $z\in H$ について，

$$g(zx)=\int_H \rho(y^{-1})g_2(yzx)dy=\int_H \rho(z(yz)^{-1})g_2((yz)x)dy$$

$$=\int_H \rho(zy^{-1})g_2(yx)\,dy=\rho(z)\int_H \rho(y^{-1})g_2(yz)dy$$

$$=\rho(z)g(x)$$

$g(e)=g_1(e)=\rho(e)\cdot\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1=(1,0,\cdots,0)$ であるから，G における e の近傍 U 上で $g(x)$ の第1座標は正となるようにとれる．そのとき，補題2.8の h について，$Kg(e)=\int_G h(ey^{-1})g(y)dy$ の第1座標は正となるから，$Kg(e)\neq\mathbf{0}$.

$f=P_c(Kg)\in V_c$ とおく．$A=\rho(y)$ とおけば A は線型変換であって，上の $g(yx)=\rho(y)g(x)$ は $L_{y^{-1}}(g)=A(g)$ と同値である．補題2.5，補題2.7により，

$$L_{y^{-1}}(f)=L_{y^{-1}}P_c(Kg)=P_cKL_{y^{-1}}(g)=P_cKA(g)=AP_c(Kg)=A(f)$$

即ち，$f(yx)=\rho(y)f(x)$ $(y\in H, x\in G)$ がみたされる．

定理1.12(4)は P_c を用いて表わせば，$c\to 0$ のとき $P_c(Kg)$ は Kg に一様収束するということになる．$Kg(e)\neq\mathbf{0}$ であるから，c を十分小さくとれば，$f(e)=P_c(Kg)(e)\neq\mathbf{0}$ となる． (終)

定理 2.10 G をコンパクト群，H をその閉部分群とする．$\boldsymbol{R}^n$ 上の H の任意の表現 $\rho: H\to GL(n,\boldsymbol{R})$ に対して，G の表現 $\eta: G\to GL(m,\boldsymbol{R})$ と H の表現 $\mu: H\to GL(m-n,\boldsymbol{R})$ が存在して，η の H への制限 $\eta|H$ は直和 $\rho\oplus\mu$ に同値となる．

［証明］ コンパクト群の表現は完全可約であるから，ρ が既約の場合に定理を示せば十分である．

$$W=\{f\in V_c \mid f(yx)=\rho(y)\cdot f(x),\ \ y\in H,\ \ x\in G\}$$
$$=\{f\in V_c \mid L_{y^{-1}}f=\rho(y)\circ f,\ \ y\in H\}$$

とおく．W は V_c の線型部分空間，従って有限次元である．

$z\in G$ について，$R_z(W)\subset W$ であることを示そう．$f\in V_c$ のとき $f=P_c(f_0)$ となる $f_0\in V$ をとれば，補題2.7によって，$R_zf=R_zP_c(f_0)=P_cR_z(f_0)\in V_c$. また，(2.3)(1)によって，$f\in W$ と $y\in H$ について，

$$L_{y^{-1}}(R_zf)=R_z(L_{y^{-1}}f)=R_z(\rho(y)\circ f)=\rho(y)\circ R_zf$$

であるから，$R_zf\in W$. さらに，(2.3)(2)によって，$z\mapsto R_z|W$ は G の W 上の1つの表現 $\eta: G\to GL(W)$ を定める．

$$J:\ W\longrightarrow\boldsymbol{R}^n \Longleftrightarrow J(f)=f(e)$$

とおくとき，任意の y について，右図は可換である：

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\ J\ } & \boldsymbol{R}^n \\ \downarrow{\scriptstyle R_y} & & \downarrow{\scriptstyle \rho(y)} \\ W & \xrightarrow{\ J\ } & \boldsymbol{R}^n \end{array}$$

$$JR_y(f)=R_yf(e)=f(y)=\rho(y)f(e)=\rho(y)J(f)$$

特に，$R_y(\operatorname{Ker}J)\subset\operatorname{Ker}J$ であるから，$\eta|H: H\to GL(W)$ を考えると，

Ker J は W の $(\eta|H)$-不変部分空間．コンパクト群 H の表現の完全可約性によって，W の $(\eta|H)$-不変部分空間 W_0 があって，$W=W_0 \oplus \mathrm{Ker}\,J$ (直和)．$(\eta|H)$ の W_0, Ker J への制限をそれぞれ ρ_0, μ とするとき，

$$\rho|H=\rho_0 \oplus \mu$$

$W_0=W/\mathrm{Ker}\,J$ であるから，J は単射 $J_0: W_0 \to \boldsymbol{R}^n$ を誘導し，これによって W_0 を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とみるとき，前の可換図式より，W_0 は $\boldsymbol{R}^n$ において ρ-不変である．ρ は既約であったから，$W_0=0$ または $J_0: W_0 \cong \boldsymbol{R}^n$ である．

補題 2.9 の f は W に属し，かつ $J(f)=f(e) \neq \boldsymbol{0}$ である．従って，$W_0 \neq 0$. 即ち，$J_0: W_0 \cong \boldsymbol{R}^n$，かつ，$\rho_0$ と ρ は J_0 によって同値となる．結局，$\eta|H$ は $\rho \oplus \mu$ と同値である．(終)

直交群の部分群と同型なコンパクト群

定理 2.11　G をコンパクト群，H をその閉部分群，U を G における単位元 e の近傍とするとき，ある n について，表現 $\rho: G \to GL(n, \boldsymbol{R})$ とベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^n$ が存在して，$H \subset G_{\boldsymbol{v}} \subset UH$. ただし，$G_{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ における等方群．

［証明］　e の近傍 W で，$W=W^{-1}$, $W^2 \subset U$ をみたすものをとり，連続関数 $h: G \to \boldsymbol{R}$ で，$h(e)=1$, $h(x)=h(x^{-1}) \geq 0$, $x \notin W \Longrightarrow h(x)=0$, となるものを選ぶ．

また，G/H もコンパクト Hausdorff 空間であるから，連続関数 $f_0: G/H \to \boldsymbol{R}$ で，$f_0(eH)=1$, $f_0(xH) \geq 0$, $x \notin WH \Longrightarrow f_0(xH)=0$, となるものが選べる．

$$f: G \longrightarrow \boldsymbol{R} \Longleftrightarrow f(x)=f_0(xH)$$

で f を定義すると，$R_y f=f$ $(y \in H)$, $f(e)=1$, $x \notin WH \Longrightarrow f(x)=0$, である．

$$Kf(x)=\int h(xy^{-1})f(y)dy$$

を考える．$Kf(x) \neq 0$ であれば，ある $y \in G$ について，$xy^{-1} \in W$, $y \in WH$. 従って，$x \in W^2H \subset UH$ でなければならない．また，$h(xy^{-1})f(y) \geq 0$, $h(\epsilon)f(e)=1$ であるから，次のことがわかる：

$$Kf(x) \geq 0, \quad Kf(e)>0, \quad x \notin UH \Longrightarrow Kf(x)=0$$

定理 1.12(4) により，$c \to 0$ のとき $P_c(Kf)$ は Kf に一様収束するから，c を十分小さくとることによって，

$$x \notin UH \Longrightarrow P_c(Kf)(e)>P_c(Kf)(x)=R_x P_c(Kf)(e)$$

が成り立つ．このような c について，$V_c \subset V=\{G\to\boldsymbol{R}\}$ を考え，$\boldsymbol{v}=P_c(Kf)\in V_c$ とおく．V_c は有限次元であるから，$V_c=\boldsymbol{R}^n$ と思ってよい．

$x\,(\in G)\longmapsto R_x|V_c : V_c\to V_c$ (補題 2.7) で定まる G の表現を ρ とする．

上に示したように，$x\notin UH$ ならば，$\boldsymbol{v}(e)=P_c(Kf)(e)>R_xP_c(Kf)(e)=R_x(\boldsymbol{v})(e)$ $\Longrightarrow \boldsymbol{v}\neq R_x(\boldsymbol{v})=\rho(x)(\boldsymbol{v})\Longrightarrow x\notin G_{\boldsymbol{v}}$，即ち $G_{\boldsymbol{v}}\subset UH$ である．

次に，$y\in H$ のとき $R_yf=f$ であった．R_y は K，P_c と可換であるから，

$$R_y(\boldsymbol{v})=R_yP_c(Kf)=P_cK(R_yf)=P_c(Kf)=\boldsymbol{v}$$

故に，$H\subset G_{\boldsymbol{v}}$ である． (終)

系 2.12 G をコンパクト群，U を G における単位元 e の近傍とするとき，準同型 $\rho : G\to O(n)$ が存在して，$\mathrm{Ker}\,\rho\subset U$.

［証明］ 定理 2.11 において $H=\{e\}$ とおけば，$\mathrm{Ker}\,\rho\subset G_{\boldsymbol{v}}\subset U$. また，定理 2.1 によって，$\boldsymbol{R}^n$ の内積をとりかえて，$\rho(G)\subset O(n)$ にできる． (終)

定義 位相群 G は**小部分群**をもたない．

$\Longleftrightarrow$ G における単位元 e の近傍 U があって，U に含まれる G の部分群は $\{e\}$ のみである．

補題 2.13 Lie 群は小部分群をもたない．

［証明］ G を n 次元 Lie 群とし，指数写像 $\exp : \boldsymbol{R}^n=L(G)\to G$ を考える．$\exp$ は局所同相であるから，$\boldsymbol{R}^n$ における $\boldsymbol{0}$ の有界凸近傍 V を選んで，$\exp$ は V から G の単位元 e の近傍への同相となるようにする．$\frac{1}{2}V=\{\frac{1}{2}A\mid A\in V\}$，$U=\exp(\frac{1}{2}V)$ とおく．いま，G の部分群 H が $\{e\}\neq H\subset U$ をみたしているとする．$e\neq h\in H$ とするとき，$\boldsymbol{v}\in\frac{1}{2}V$ があって，$\exp(\boldsymbol{v})=h$，$\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$ となる．V が有界凸であることから，整数 $r>1$ が存在して，$2^r\boldsymbol{v}\in V-\frac{1}{2}V$. このとき，$\exp|V$ は単射であるから，$h^{2^r}=\exp(2^r\boldsymbol{v})\in\exp(V)-U$. これは，$H$ が部分群 $\Longrightarrow h^{2^r}\in H\subset U$，に反する．故に，$G$ は小部分群をもたない． 終)

定理 2.14 コンパクト群 G について，次の各条件は同値である：

(1) G は小部分群をもたない．

(2) ある n について，G は $O(n)$ の (閉) 部分群に同型．

(3) G は Lie 群 (の構造をもつ)．

［証明］ ［(1) $\Longrightarrow$ (2)］ 系 2.12 において，$\mathrm{Ker}\,\rho=\{e\}$ にとれる．$\rho : G\to O(n)$

は単射，G と $O(n)$ はコンパクト Hausdorff 空間であるから，G と $\rho(G)$ は同相．故に，G は $O(n)$ の(閉)部分群 $\rho(G)$ に同型．

［(2) $\Longrightarrow$ (3)］第1章定理 5.13 より明らか．

［(3) $\Longrightarrow$ (1)］補題 2.13 より明らか．　(終)

§3　極大トーラス

トーラス

$U(1)$ の n 個の直積に同型な位相群を **n 次元トーラス**といい，

$$T=T^n\cong U(1)\times\cdots\times U(1),\quad n=\dim T\ (T\text{ の次元})$$

で表わす．明らかに，トーラスはコンパクト連結可換 Lie 群である．

$$p:\boldsymbol{R}^n\longrightarrow T^n \Longleftrightarrow p(t_1,\cdots,t_n)=(\exp(2\pi \boldsymbol{i}t_1),\cdots,\exp(2\pi \boldsymbol{i}t_n))$$

とおけば，p は Lie 群の普遍被覆準同型で，$\mathrm{Ker}\,p=\boldsymbol{Z}^n=\{(t_1,\cdots,t_n)\,|\,t_i\in\boldsymbol{Z}\}$ であるから，

(3.1)　$$T^n=\boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$$

とみなし，T の点 $p(t_1,\cdots,t_n)$ を単に $(t_1,\cdots,t_n)$ で表わすことにする．

定義　位相群 G は**単生成**である $\Longleftrightarrow$ G の元 g が存在して，g を含む任意の閉部分群は G と一致する．このとき，g を G の**生成元**という．

g で生成された部分群 H を考えると，その閉包 $\overline{H}$ は閉部分群である．$\overline{H}=G$ となる g があることと，G が g を生成元として単生成であることとは同値である．上の H は可換，従って $\overline{H}$ も可換である．よって，

(3.2)　G が単生成 $\Longrightarrow$ G は可換．

定理 3.3　トーラス T^n は単生成で，生成元は T^n で稠密にある．

［証明］（実際 $\{t_1,\cdots,t_n\,|\,t_i\in\boldsymbol{R}^n\}$ が有理数体上一次独立であることと，$(t_1,\cdots,t_n)$ が T^n の生成元であることとは同値である．）T^n の点を $\boldsymbol{R}^n$ の座標 $(t_1,\cdots,t_n)$ で表わせば，群の乗法は和で表わされる．T^n における一辺の長さが $a\,(>0)$ の立方体 C とは，ある点 $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ について $C=\{(x_1,\cdots,x_n)\in T^n\,|\,\xi_i\leq x_i\leq\xi_i+a\}$ なるものとする．$a\geq 1$ ならば $C=T^n$ に注意する．さて，任意の立方体 C の中に生成元が存在することをいえば十分である．

$U_1,U_2,\cdots$ を T の可算な開基とする．$C=C_0$ より出発して，帰納的に立方

体の減少列 $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ を次のように作る：C_{m-1} の一辺の長さを $\varepsilon > 0$ とするとき，$N(m)\varepsilon \geq 1$ となる整数 $N(m)$ が存在する．$N(m)C_{m-1} = T^n$ となるから，C_{m-1} に含まれる立方体 C_m で $N(m)C_m \subset U_m$ をみたすものがとれる．このようにして作った $\{C_m\}$ はコンパクト集合 T^n の空でない閉集合の減少列であるから，$\cap C_m \neq \phi$. $g \in \cap C_m$ とするとき，$N(m)g \in U_m$. 従って，g で生成される部分群は T^n で稠密となるから，g は T^n の生成元である． (終)

補題 3.4 可換な位相群 G が，G/T^n＝有限巡回群，となるようなトーラス T^n を部分群にもてば，G は単生成である．

［証明］ t を T^n の生成元，$u \in G$ をその射影が G/T^n の生成元となるような元とする．G/T^n の位数を m とすれば $mu \in T^n$ である．$t - mu \in T^n$ に対して $ms = t - mu$ となる $s \in T^n$ の存在することは，$\boldsymbol{R}^n$ の座標で書いて見れば明らかである．$g = u + s$ とおけば，$mg = m(u+s) = t$ で生成される部分群 H は T^n で稠密 $\Longrightarrow ig \cdot H$ は $ig \cdot T^n = iu \cdot T^n$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ で稠密．$G = \bigcup_i iu \cdot T^n$ であるから，g は G の生成元である． (終)

定理 3.5 G を連結可換 Lie 群とすれば，整数 n, k があって，

$$G \cong \boldsymbol{R}^{n-k} \times T^k \quad (\text{Lie 群の同型})$$

［証明］ G の Lie 環 $\mathfrak{g} = L(G)$ は $\boldsymbol{R}^n$ と同型である $(n = \dim G)$．ここで，

(3.5)′ G：可換 Lie 群 $\Longrightarrow$ 指数写像 $\exp$ ： $\mathfrak{g} \to G$ は Lie 群の準同型

に注意する．実際，可換性から $\exp(tX)\exp(tY)$ は 1 助変数部分群で，その初期ベクトルは $X+Y$ であるから，$\exp(tX+tY) = \exp(tX)\exp(tY)$. $t=1$ とおいて，$\exp(X+Y) = \exp(X)\exp(Y)$. $\exp$ は局所同相であるから，$\exp^{-1}(e)$ は $\mathfrak{g}$ の離散部分群．$\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間 $\mathfrak{g}$ の中で最大数の独立な $\exp^{-1}(e)$ の元を $x_1, \cdots, x_k$ とし，これに $x_{k+1}, \cdots, x_n$ をつけ加えて $\mathfrak{g}$ の $\boldsymbol{R}$-基底を作り，これらで張られる部分空間をそれぞれ $\boldsymbol{R}^k, \boldsymbol{R}^{n-k}$ とする：$\mathfrak{g} = \boldsymbol{R}^{n-k} \oplus \boldsymbol{R}^k$. 明らかに，$\exp^{-1}(e) \subset \boldsymbol{R}^k$. 従って，$G \cong \boldsymbol{R}^{n-k} \times (\boldsymbol{R}^k/\exp^{-1}(e))$. F を $x_1, \cdots, x_k$ で生成される $\exp^{-1}(e)$ の部分群とすると，$\exp^{-1}(e)/F$ は $\boldsymbol{R}^k/F$ の離散部分群かつ $\boldsymbol{R}^k/F \cong T^k$ はコンパクトであるから，$\exp^{-1}(e)/F$ は有限である．F は有限生成 $\Longrightarrow$ $\exp^{-1}(e)$ は有限生成．$\boldsymbol{R}^n$，従って $\exp^{-1}(e)$ に有限位数の元はないから，アーベル群の基本定理によって，$\exp^{-1}(e)$ は自由アーベル群でその生成元の個数は k

である．従って，$\boldsymbol{R}^k/\exp^{-1}(e)\cong T^k$．結局，$G\cong\boldsymbol{R}^{n-k}\times T^k$． （終）

系 3.6 コンパクト連結可換 Lie 群はトーラスである．

定理 3.7 T, T' はトーラスで，T' が T の部分群であれば，T の部分群であるトーラス T'' があって，$T=T'\times T''$．

［証明］ $K=\exp^{-1}(e)\subset L(T)$，$K'=K\cap L(T')$ とおく．exp は同型 $L(T)/K\cong T$，$L(T')/K'\cong T'$ を誘導する．K/K' は有限生成アーベル群 $\Longrightarrow K/K'$ は自由アーベル群 F と有限群 S の直和．射影の合成 $K\to K/K'\to F$ の核を F', F のリフトを F'' とすると，$K=F'\oplus F''$ (直和)，$F'\supset K'$，$F'/K'\cong S$．F', F'' で張られる $\boldsymbol{R}$ 上の部分空間をそれぞれ V', V'' とすると，$L(T)=V'\oplus V''$．$L(T')$ は K' で張られる $\Longrightarrow L(T')\subset V'$．しかも，$V'/L(T')\cong F'/K'\cong S$ は有限．故に，$V'=L(T')$．以上のことから，

$$T'\cong L(T')/K'=V'/K',\quad T\cong L(T)/K=(V'/F')\times(V''/F'')$$

射入 $i: T'\to T$ は自然な対応 $V'/K'\to V'/F'\subset T$ で与えられ，$S\cong K'/F'=\mathrm{Ker}\, i=0\Longrightarrow K'=F'$． $V''/F''=T''$ とおいて $T=T'\times T''$． （終）

系 3.8 T, T' はトーラス，$T\supset T'$，$\dim T=\dim T'\Longrightarrow T=T'$．

極大トーラス

以下この§では，

$$G \text{ はコンパクト連結 Lie 群}$$

とする．定理 2.14 により，$G\subset O(N)$ と考えてよい．G の接空間 T_xG は，$T_xO(N)$ の部分空間と考えることによって，自然に内積が導入され，G の作用

(3.9) dL_g，dR_g，$dA_g=dL_g\circ dR_{g^{-1}}: TG\to TG$ は内積を保つ．

いいかえると，G は G の積で不変な Riemann 計量をもつ(定理 1.13(3))．特に，G の $\mathfrak{g}=L(G)=T_eG$ への随伴作用

(3.9)′ $Ad(g)=dA_g|\mathfrak{g}: \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ は直交変換である．

あるトーラスと同型な G の部分群 T を，単に G の**トーラス**という．T はコンパクトであるから，トーラス T は G の閉部分群，従って，閉 Lie 部分群であり，系 3.6 によって，それは G の連結可換閉部分群として特徴づけられる．

定義 T は G の**極大トーラス** $\Longleftrightarrow$ T は G のトーラスで，T' が T を含む G のトーラスであれば，$T=T'$．

定理 3.10　(1)　Gの任意のトーラスはGのある極大トーラスに含まれる．

(2)　G の極大トーラス T を含む連結可換部分群は T と一致する．

［証明］　(1)　G のトーラス T を含む極大トーラスがなければ，トーラスの真の増加列　$T \subsetneqq T_1 \subsetneqq T_2 \subsetneqq \cdots$ が無限にとれる．系 3.8 により，$\dim T < \dim T_1 < \dim T_2 < \cdots \leq \dim G$. これは矛盾であるから，(1)がえられる．

(2)　$T \subset A \subset G$，A は連結可換部分群とすれば，A の閉包 $\overline{A}$ は連結可換閉部分群．G はコンパクト$\Longrightarrow \overline{A}$ もコンパクト．系 3.6 により，$\overline{A}$ はトーラス．

従って，$T=\overline{A} \Longrightarrow T=A$.　(終)

補題 3.11　トーラス T^n の自己同型群 $\mathrm{Aut}\,T^n$ はコンパクト開位相で離散位相をもつ．

［証明］　$p : \boldsymbol{R}^n \to T^n = \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ は普遍被覆群である．同型 $f : T^n \to T^n$ に対して，$f \circ p$ のリフト $\tilde{f} : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ で $\tilde{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となるものが一意的にとれ，$\tilde{f}$ は同型となる．$f \mapsto \tilde{f}$ で与えられる対応 $\varphi : \mathrm{Aut}\,T^n \to \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{R}^n = GL(n, \boldsymbol{R})$ を考える．T^n はコンパクト距離空間であるから，$\mathrm{Aut}\,T^n$ のコンパクト開位相と写像の距離で定義される位相は同値．このことから，φ は連続な単射であることがわかる．$\mathrm{Im}\,\varphi$ は成分が整数かつ行列式$=\pm 1$ の行列から成るから，$GL(n, \boldsymbol{R})$ の離散部分群である．φ の連続性から，$\mathrm{Aut}\,T^n$ も離散集合である．　(終)

記号(復習)　$N(S) = N_G(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\}$: S(部分集合)の正規化群

$Z(S) = Z_G(S) = \{g \in G \mid ga = ag,\ \forall a \in S\}$: S の中心化群

$H_0 = H$ (部分群)の単位元を含む連結成分

$A : G \times G \longrightarrow G \Longleftrightarrow A(g, x) = gxg^{-1}$ (随伴作用)

$A_g : G \longrightarrow G\ (g \in G) \Longleftrightarrow A_g(x) = gxg^{-1}$ (内部自己同型)

$N(S)$ は A によって S に作用する：

$$A \mid N(S) : N(S) \times S \longrightarrow S$$

補題 3.12　T が G の極大トーラスならば，$N(T)_0 = Z(T)_0 = T$　かつ $N(T)/T$　は有限群．

［証明］　$N(T)$ は Lie 群 G の閉部分群であるから Lie 群である．$N(T)$のT への作用は，連続写像 $N(T) \to \mathrm{Aut}\,T$ を誘導する．補題 3.11 により，連結成分 $N(T)_0$ は単位元へ写される．即ち，$N(T)_0$ は Tに自明に作用して，$N(T)_0$

$\subset Z(T)$. $X\in L(Z(T))$ に対して，$T\cup\{\exp tX\mid t\in \boldsymbol{R}\}$ は連結可換部分群 H を生成する．定理 3.10(2) により，$T=H\Longrightarrow Z(T)_0=N(T)_0=T$. $N(T)/T=N(T)/N(T)_0$ は離散位相をもちかつコンパクトであるから有限群である．(終)

極大トーラスの共役性

ここで，不動点定理を証明なしに引用する：

(3.13)　(**Lefschetz の不動点定理**) 多面体 X において，$f\simeq 1_X : X\to X$ かつ不動点のない f ($f(x)\neq x$, $\forall x\in X$) があれば，$\chi(X)=0$ である．

ここで，$\chi(X)$は **Euler 標数**

$$\chi(X)=\sum_i(-1)^i\dim_k H_i(X\,;\,\boldsymbol{k})=\sum_i(-1)^i\#\{i\text{ 次元胞体}\subset X\}$$

である．$\chi(X)$ は，一般の位相空間については初めの等号で定義され，多面体または有限 CW-複体については第2の等号が成り立つ（第7章§3参照）．

定理 3.14　T を G の極大トーラスとするとき，$\dim(G/N(T))$ は偶数で，

$$\chi(G/N(T))=1$$

$$\chi(G/T)=|N(T)/T|\quad (N(T)/T\text{ の位数})$$

［証明］ 左移動による T の $G/N(T)$ への作用を考える．$T\subset N(T)$であるから，$G/N(T)$ の点 $N(T)=p(e)$ はこの作用の不動点である．$T_eG/T_e(N(T))\cong T_{p(e)}(G/N(T))$ において，$T_{p(e)}(G/N(T))$ を $T_e(N(T))^{\perp}$ (直交補空間) と同一視すると，(3.9) によって，この作用は直交変換である．$\exp|T_e(N(T))^{\perp}$ を考えることによって，$p(e)$ を中心とする disk $D^m\subset G/N(T)$, $m=\dim(G/N(T))$, が存在して，

$$D^m,\qquad S^{m-1}=\partial D^m,\qquad M=G/N(T)-\operatorname{Int}D^m$$

はいずれも T のこの作用で自分自身へ写される．

t を T の生成元として，$p(g)=gN(T)$ が t の作用で不変とする：

$$t\cdot p(g)=p(g)\Longleftrightarrow tgN(T)=gN(T)\Longleftrightarrow g^{-1}tg\in N(T)$$

$$\Longleftrightarrow g^{-1}t^ng\in N(T)\quad (n=1,2,\cdots)$$

$\{t^n\}$ は T で稠密であるから，これは $g^{-1}Tg\subset N(T)$ と同値．$g^{-1}Tg$ は連結で $N(T)_0=T$ (補題 3.12) であるから，これは $g^{-1}Tg=T$ 即ち $g\in N(T)$ と同値である．結局，Tの左作用による不動点は $p(e)$ のみである．t と e を Tで結ぶ道があるから，$t\cdot\simeq 1_M : (M, S^{m-1})\to(M, S^{m-1})$. (3.13)を使って，

$$\chi(M)=\chi(S^{m-1})=0$$

特に，$\chi(S^{m-1})=1+(-1)^{m-1}$ であるから，m は偶数である．また，胞体分割または切除公理を使えば，次の式が(一般に)成り立つ：

$$\chi(G/N(T))=\chi(M)+\chi(D^m)-\chi(S^{m-1})$$

故に，$\chi(G/N(T))=\chi(D^m)=1$.

G/T は $G/N(T)$ の被覆空間で，その被覆度数は $|N(T)/T|$. $G/N(T)$ の胞体分割の各胞体を G/T にリフトして G/T の胞体分割がえられるから，

$$\chi(G/T)=|N(T)/T|\cdot\chi(G/N(T))=|N(T)/T| \qquad \text{(終)}$$

次の定理は第1章定理 3.11 の一般化である．

定理 3.15 T を G の極大トーラスとするとき，任意の元 $x\in G$ に対して，$g^{-1}xg\in T$ となる $g\in G$ が存在する．即ち，

$$G=\bigcup_{g\in G} gTg^{-1}$$

［証明］ $hT\longmapsto xhT$ で定義される写像 $f:G/T\to G/T$ を考える．x と e を結ぶ道を使って，$f\simeq 1:G/T\to G/T$. 一方，定理 3.14 によって，$\chi(G/T)\neq 0$ である．従って，(3.13)によって，f は不動点 gT をもたなければならない．

このとき，$gT=f(gT)=xgT\Longrightarrow g^{-1}xgT=T\Longrightarrow g^{-1}xg\in T$. (終)

系 3.16 極大トーラスは互いに共役である．即ち，T を G の1つの極大トーラスとすると，

T' が G の極大トーラス $\Longleftrightarrow$ $T'=gTg^{-1}$ となる $g\in G$ がある．

［証明］ T' の生成元 x に対して $g\in G$ があって，$x\in gTg^{-1}\Longrightarrow T'\subset gTg^{-1}\Longrightarrow T'=gTg^{-1}$. 逆に，$gTg^{-1}$ は T と共役だから極大トーラスである．

(終)

系 3.17 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ は全射である．(G：コンパクト連結)

［証明］ 任意の $x\in G$ は $x=gtg^{-1}$，$t\in T$，$g\in G$，と書ける．$X\in\exp^{-1}(t)$ について，$s(\alpha)=g(\exp(\alpha X))g^{-1}$ は1助変数部分群で $x=s(1)$. s の初期ベクトル $Y\in\mathfrak{g}$ について，$x=\exp Y$ となる． (終)

定理 3.18 T は G の極大トーラス，A は T の任意の部分集合とする．$g\in G$ が $gAg^{-1}\subset T$ をみたすならば，$k\in N(T)$ が存在して，

$$kak^{-1}=gag^{-1} \quad (\forall a\in A)$$

［証明］ $Z(A)=\{h\in G\,|\,ha=ah,\ \forall a\in A\}$ は G の閉部分群．従って，$Z(A)$ の単位元成分 $H=Z(A)_0$ はコンパクト連結 Lie 群である．明らかに，$T\subset H$．$A\subset g^{-1}Tg$ かつ $g^{-1}Tg$ は可換 $\Longrightarrow g^{-1}Tg\subset H$．$T$ および $g^{-1}Tg$ はともに H の極大トーラスであるから，$g^{-1}Tg=h^{-1}Th$ となる $h\in H$ が存在する．このとき，$k=gh^{-1}$ とおけば $kTk^{-1}=T\Longrightarrow k\in N(T)$．また，任意の $a\in A$ について，$kak^{-1}=gh^{-1}ahg^{-1}=gag^{-1}$．（終）

補題 3.19　S は G の連結可換部分群，$g\in G$ が S のすべての元と可換ならば，g と S を含むトーラスが存在する．

［証明］ g と S で生成される部分群を H とすると，H は可換 $\Longrightarrow \overline{H}$ はコンパクトかつ可換 $\Longrightarrow \overline{H}$ の単位元成分 $\overline{H}_0$ はトーラス．$\overline{H}/\overline{H}_0$ は有限かつ g で生成されるから，有限巡回群．補題 3.4 によって，$\overline{H}$ は生成元 h をもつ．定理 3.15 によって，h を含む極大トーラス T が存在するから，$\overline{H}\subset T$．故に，$S\cup g\subset H\subset \overline{H}\subset T$．（終）

系 3.20　S：連結可換部分群 $\Longrightarrow Z(S)=\cup(S$ を含む極大トラース$)$．

特に，T：極大トーラス $\Longrightarrow Z(T)=T$．

定理 3.21　T は G の極大トーラスとする．G の可換部分群 A が T を含むならば $A=T$ である．即ち，極大トーラスは極大な可換部分群である．

［証明］ 任意の $g\in A$ をとる．補題 3.19 により，$g\cup T\subset U$ となるトーラス U がある．T は極大トーラス $\Longrightarrow g\in U=T$．故に，$A=T$．（終）

定理 3.22　T' を G の任意のトーラスとするとき，T' の中心化群 $Z(T')$ は連結で，正規化群 $N(T')$ の単位元成分 $N(T')_0$ と一致する．

［証明］ 明らかに，$Z(T')\subset N(T')$．系 3.20 より，$Z(T')=\cup(T'$ を含む極大トーラス$)\Longrightarrow Z(T')$ は連結．故に，$Z(T')\subset N(T')_0$．

一方，補題 3.12 の証明の前半はトーラス T' についても成立し，$N(T')_0$ は T' に自明に作用するから，$N(T')_0\subset Z(T')$．故に，$Z(T')=N(T')_0$．（終）

系 3.16 によって，コンパクト連結 Lie 群 G の極大トーラス T の次元は T の選び方にかかわらず一定である．従って，次の定義ができる．

定義　G（コンパクト連結 Lie 群）の極大トーラス T の次元を G の**階数**といい，

$$l=\operatorname{rank}G\quad(=\dim T)$$

で表わす.

ここで定義した階数 l が，第4章§6においてコホモロジー環を用いて定義した階数と一致することは，第6章定理5.5で示されるであろう.

Weyl 群

定義 T を G のトーラスとするとき，T をそれ自身に写す共役変換全体

$$W(G:T)=\{\varphi : T\to T \mid \text{ある } g\in G \text{ について，} \varphi(t)=gtg^{-1}\}$$

を T に関する G の **Weyl 群**という．特に，T が極大トーラスのときには，$W(G:T)$ を単に G の **Weyl 群**といい，$W(G)$ で表わす.

$\varphi(t)=gtg^{-1}$ のとき，$\varphi\in W(G:T) \Longleftrightarrow gTg^{-1}=T \Longleftrightarrow g\in N(T)$．また，$\varphi=1_T \Longleftrightarrow gtg^{-1}=t\ (\forall t\in T) \Longleftrightarrow g\in Z(T)$．これらと定理3.22を組合わせて，

(3.23) $W(G:T)\cong N(T)/Z(T)=N(T)/N(T)_0$ （有限群）

がえられる．T が極大トーラスの場合には，系3.20により，$Z(T)=T$ である．さらに，系3.16を使って次がえられる：

(3.24) $W(G)=N(T)/Z(T)=N(T)/T$ であり，これは極大トーラス T のとり方によらず同型の意味で一意的に定まる.

補題 3.25 T は G の極大トーラス，H は T に含まれる G の正規閉部分群と仮定する．そのとき，次が成り立つ：

(1) $N(T/H)=N(T)/H$

(2) T/H は G/H における極大トーラス.

(3) $W(G/H)\cong W(G)$

［証明］ $\pi : G\to G/H$ を射影とする.

(1) π が準同型であるから，$n\in N(T) \Longrightarrow \pi(n)\in N(T/H)$．逆に，$\pi(n)\in N(T/H)$ ならば，任意の $t\in T$ について，$n(tH)n^{-1}\subset T$．H は正規であるから，$ntHn^{-1}=ntn^{-1}H\subset T \Longrightarrow ntn^{-1}\in T \Longrightarrow t\in N(T)$．故に $N(T/H)=N(T)/H$.

(2) T/H は可換，連結かつコンパクトであるからトーラスである．G/H のトーラス U/H が T/H を含むとすると，$U/H\subset N(T/H)=N(T)/H \Longrightarrow T\subset U\subset N(T) \Longrightarrow \dim T=\dim U \Longrightarrow \dim T/H=\dim U/H \Longrightarrow T/H=U/H$．故に，$T/H$ は極大トーラス.

(3) $W(G/H)=N(T/H)/(T/H)=(N(T)/H)/(T/H)\cong N(T)/T=W(G)$

(終)

補題 3.26　rank $G=1$ ならば，

(1) $\dim G=1,\ \ W(G)=0$　　または (2) $\dim G=3,\ \ W(G)\cong \boldsymbol{Z}_2$

［証明］ $\dim G=1 \Longrightarrow G=T \Longrightarrow W(G)=0$

$\dim G=n>1$ とし，$L(T)$ の長さ 1 のベクトル X を考える．写像

$$f : G/T \longrightarrow S^{n-1}\subset L(G) \Longleftrightarrow f(gT)=Ad(g)\cdot X$$

は well-defined である．実際，$t\in T$ について，$Ad(t)X=X$ であるから，$f(gt)=Ad(g)Ad(t)X=Ad(g)X=f(g)$．また，$Ad(g)X=Ad(g')X$ ならば，$Ad(g^{-1}g')X=X \Longrightarrow g^{-1}g'\in Z(T)=T$ (系 3.20) $\Longrightarrow gT=g'T$．これは f が単射であることを示している．f は同じ次元の多様体の間の C^∞-写像かつ単射であるから，G/T の 1 点 x で接空間の単射，従って同型をひきおこす．即ち，f は x の近傍 U を $f(x)$ の近傍 V の上へ同相に写し，$f^{-1}(V)=U$ である．図式

$$\begin{array}{ccccc}
H_{n-1}(G/T) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(G/T, G/T-x) & \xleftarrow{j_*} & H_{n-1}(U, U-x) \\
\downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\
H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(S^{n-1}, S^{n-1}-f(x)) & \xleftarrow{j_*} & H_{n-1}(V, V-f(x))
\end{array}$$

は可換，2 つの j_* は切除同型，2 つの i_* は G/T と S^{n-1} が可符号(これを示すのが面倒であれば，mod 2 で考えよ)多様体であることから同型対応であることがわかる．右端の f_* は明らかに同型 $\Longrightarrow$ 図式の f_* はすべて同型．いま f が全射でないと仮定すれば，$S^{n-1}-(1$ 点$)$ は可縮であるから，$f\simeq 0 \Longrightarrow f_*=0$．これは f_* が同型に反する．故に，f は全射でなければならない．

さて，f が全射であるから，$Ad(h)X=-X$ となる $h\in G$ がある．このとき，$Ad(h)(L(T))\subset L(T) \Longrightarrow A_h(T)=hTh^{-1}\subset T \Longrightarrow h\in N(T)$．また，$A_h$ は $t\in T$ を t^{-1} に写す．$\dim T=1$ であるから，$\mathrm{Aut}(T)\cong \boldsymbol{Z}_2$ で，これは A_h で生成される．故に，$W(G)\cong \boldsymbol{Z}_2$ が証明された．

f はコンパクト多様体の全単射であるから同相写像である．従って，次の完全系列がえられる：

$$\pi_2(S^{n-1}) \xrightarrow{\partial} \pi_1(T) \xrightarrow{*} \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1(S^{n-1})$$

$\pi_1(T)\cong \boldsymbol{Z}$ は恒等写像の類 $\iota=[1_T]$ で生成される．h_θ を単位元と h を結ぶ道とすれば，ホモトピー $t(\in T)\longmapsto h_\theta t h_\theta^{-1}$ は $i_*(\iota)=i_*(-\iota)$，即ち $i_*(2\iota)=0$ を

示している．故に，$\partial(\pi_2(S^{n-1}))\supset 2\pi_1(T)\Longrightarrow\pi_2(S^{n-1})\neq 0\Longrightarrow n=3.$ (終)

系 3.27 $\mathrm{rank}\,G=1$, $\dim G=3$ ならば，G は S^2 上の S^1-バンドルで，$\pi_1(G)$ は 0 または $\boldsymbol{Z}_2$ に同型である．

注意 3.28 系 3.27 で，$\pi_1(G)=0\Longrightarrow G\cong Sp(1)$；$\pi_1(G)\cong\boldsymbol{Z}_2\Longrightarrow G\cong SO(3)$.

§4 root と Weyl 群

root の定義

この§では，G はコンパクト連結 Lie 群で，(3.9)′ のように随伴作用(表現)

$$Ad(g)=dA_g : L(G)\to L(G)\quad (g\in G)\text{ は直交変換}$$

となるように，$L(G)=\mathfrak{g}=T_eG$ に内積が与えられているものとする．

定義 トーラス T の指数写像 $\exp : L(T)\to T$ の核 $\exp^{-1}(e)$ を**整格子**といい，$\Gamma=\Gamma(G)$ で表わす．

整格子 Γ は $k=\dim T$ 個の生成元 $t_1,\cdots,t_k$ をもつ自由アーベル群であり，$L(T)$ はそれらを基底にとって，$\boldsymbol{R}^k$ と同一視できる．T が G の極大トーラスのとき，これらの生成元 $t_1,\cdots,t_k$ のとり方は G に関連して適当に定める．

定理 4.1 (1) T を G のトーラスとする．$L(G)$ は随伴作用 Ad の T への制限に関して不変な部分空間 V_0, V_r $(r=1,2,\cdots,m)$ に直交分解

$$L(G)=V_0\oplus\sum_{r=1}^{m}V_r,\quad \dim V_r=2$$

され，T は V_0 に自明に作用し，各 V_r への作用は，V_r の正規直交基底に関して，自明でない(全射)準同型 $\bar{\theta}_r : T\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ によって次のように与えられる：

$$Ad(t)\Big|_{V_r}=\boldsymbol{r}(e^{2\pi i\bar{\theta}_r(t)})=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\bar{\theta}_r(t) & -\sin 2\pi\bar{\theta}_r(t)\\ \sin 2\pi\bar{\theta}_r(t) & \cos 2\pi\bar{\theta}_r(t)\end{pmatrix}$$

(2) 上の $\bar{\theta}_r$ は符号と順序を除いて一意的，即ち，集合 $\{\pm\bar{\theta}_1,\cdots,\pm\bar{\theta}_r\}$ は，(1)の直交分解と正規直交基底のとり方に無関係に，G と T で定まる．

［証明］ $t\in T$ を生成元とする．$Ad(t) : L(G)\to L(G)$ は直交変換であるから，直交行列 $A\in O(n)\subset M(n,\boldsymbol{R})$, $n=\dim G$, で表わされる．第1章定理 3.5 により，A は直交行列によって，$\lambda_1\oplus\cdots\oplus\lambda_{n-2m}\oplus\boldsymbol{r}(\alpha_1)\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{r}(\alpha_m)$, $\lambda_j\in\boldsymbol{R}$, $\alpha_r(\neq\pm 1)\in\boldsymbol{C}$, の形に変形できる．即ち，直交基底の変換によって，$L(G)=\sum_{j=1}^{n-2m}$

$V_j'\oplus\sum_{r=1}^{m} V_r$, $\dim V_j'=1$, $\dim V_r=2$, と分解されて，$Ad(t)$ は各 V_j', V_r に直交変換で作用する．$Ad(t^k)=Ad(t)^k$ $(k=1,2,\cdots)$ についても同様である．$\{t^k\}$ は T で稠密にあり，$Ad: T\to \mathrm{Aut}(L(G))$ は連続であるから，T は各 V_j', V_r に作用しそれぞれ準同型 $\bar\theta_j': T\to SO(1)$, $\bar\theta_r: T\to SO(2)$ を与える．$\bar\theta_j'=0$ は明らか．また，$\alpha_r\neq\pm1\Longrightarrow\bar\theta_r$ は自明ではない．よって，(1)は証明された．

集合 $\{\alpha_r,\alpha_r^{-1}\}$ は一意的(第1章定理 3.5)$\Longrightarrow$(2).　　(終)

被覆写像 $\exp: L(T)\to T$ と $p: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を考える．

$$\begin{array}{ccc} L(T) & \xrightarrow{\theta_r} & \boldsymbol{R} \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ T & \xrightarrow{\bar\theta_r} & \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \end{array}$$

$L(T)$ は1-連結であるから，合成 $\bar\theta_r\circ\exp: L(T)\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は単位元を保つ写像 $\theta_r: L(T)\to\boldsymbol{R}$ に一意的にリフトされ，θ_r は整格子 Γ を $\boldsymbol{Z}$ に写す準同型である．逆に，そのような準同型 θ_r に対して上図が可換となる準同型 $\bar\theta_r$ が一意的に定まる．このように，$\bar\theta_r$ と1対1に対応する一次形式

$$\theta_r: L(T)\longrightarrow\boldsymbol{R}\quad(\theta_r(\text{整格子})\subset\boldsymbol{Z})$$

がえられる．

定義　T が極大トーラスのとき，一次形式 $\pm\theta_r: L(T)\to\boldsymbol{R}$ $(i=1,2,\cdots,m$ を G の **root** という．また，$\pm\bar\theta_r: T\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ も **root** ということがある．

定理 4.2　T が極大トーラスであるための必要十分条件は $V_0=L(T)$ である．

［証明］(十分性)　$V_0=L(T)$, $T\subset T'$(トーラス)と仮定する．T は $L(T')$ に自明に作用するから，$L(T')\subset V_0$．$L(T)\subset L(T')\subset V_0=L(T)\Longrightarrow\dim T=\dim T'\Longrightarrow T=T'$ (系 3.8)．よって，T は極大トーラス．

(必要性)　明らかに $L(T)\subset V_0$．$X\in V_0$, $X\notin L(T)$ と仮定すれば，$\exp(\alpha X)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$, は T と元ごとに可換である．補題 3.19 によって，任意の α について，T と $\exp(\alpha X)$ を含むトーラス T_α がある．一方，$\alpha>0$ を十分小さくとれば，$\exp(\alpha X)\notin T$．これは T の極大性に反する．よって，T が極大トーラスならば $V_0=L(T)$ である．　　(終)

系 4.3　$\dim G=l+2m$．ただし，$l=\mathrm{rank}\,G$, $2m$ は root の個数．

コンパクト連結古典群と spinor 群の root

$G=U(l)$, $SU(l+1)$, $Sp(l)$, $SO(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$ $([n/2]=l)$ の root を例とし

て挙げよう．これらの極大トーラス T として，第1章§3の標準的極大トーラスをとることにする．

記号 $E_{rs}=((r,s)$-成分が1，他の成分は0の正方行列)

$[G=U(l)]$ $L(T)$ の座標 $(x_1,\cdots,x_l)$ は $\exp(x_1,\cdots,x_l)=e^{2\pi i x_1}\oplus\cdots\oplus e^{2\pi i x_l}$ にとる．$L(U(l))=\{A\in M(l,\boldsymbol{C})\mid A^*+A=O\}$ は

$$V_0=L(T) \qquad ((x_1,\cdots,x_l)=\boldsymbol{i}x_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{i}x_l \text{ とみる})$$

$$V_{rs}=\{zE_{rs}-\bar{z}E_{sr}\mid z\in\boldsymbol{C}\} \quad (1\le r<s\le l)$$

の直和に分解される．V_{rs} は $\{E_{rs}-E_{sr},\ \boldsymbol{i}E_{rs}+\boldsymbol{i}E_{sr}\}$ で張られる．

$\exp(x_1,\cdots,x_l)$ の V_{rs} への作用は

$$zE_{rs}-\bar{z}E_{sr}\longmapsto wE_{rs}-\bar{w}E_{sr}, \qquad w=e^{2\pi i(x_r-x_s)}z$$

で与えられるから，

(4.4) $U(l)$ の root は $\{\pm(x_r-x_s)\ \mid\ 1\le r<s\le l\}$．

$[G=SU(l+1)]$ $U(l+1)$ の極大トーラス T^{l+1} の座標を使って，$L(T)$ の座標は $(x_1,\cdots,\ x_{l+1})$，$x_1+\cdots+x_{l+1}=0$，で表わす．このとき上と同様に，

(4.5) $SU(l+1)$ の root は $\{\pm(x_r-x_s)\ \mid\ 1\le r<s\le l+1\}$．

$[G=Sp(l)]$ $V_0=L(T)$ については $U(l)$ と同様である．

$L(Sp(l))=\{A\in M(l,\boldsymbol{H})\mid A^*+A=O\}$ は V_0 と

$$V_r^*=\{z\boldsymbol{j}E_{rr}\mid z\in\boldsymbol{C}\} \qquad (1\le r\le l)$$

$$V_{rs}=\{zE_{rs}-\bar{z}E_{sr}\mid z\in\boldsymbol{C}\} \qquad (1\le r<s\le l)$$

$$V_{rs}^*=\{z\boldsymbol{j}E_{rs}+z\boldsymbol{j}E_{sr}\mid z\in\boldsymbol{C}\} \quad (1\le r<s\le l)$$

の直和に分解され，$\exp(x_1,\cdots,x_l)$ の作用は次の通りである：

$$z\boldsymbol{j}E_{rr} \longmapsto e^{2\pi i x_r}z\boldsymbol{j}e^{-2\pi i x_r}E_{rr}=e^{4\pi i x_r}z\boldsymbol{j}E_{rr}$$

$$zE_{rs}-\bar{z}E_{sr} \longmapsto wE_{rs}-\bar{w}E_{sr}, \qquad w=e^{2\pi i(x_r-x_s)}z$$

$$z\boldsymbol{j}(E_{rs}+E_{sr})\longmapsto e^{2\pi i(x_r+x_s)}z\boldsymbol{j}(E_{rs}+E_{sr})$$

従って，

(4.6) $Sp(l)$ の root は $\{\pm 2x_r\ (1\le r\le l);\ \pm(x_r-x_s),\ \pm(x_r+x_s)\ (1\le r<s\le l)\}$ である．

$[G=SO(2l)]$ $U(l)$ の極大トーラス T^l について，$SO(2l)$ の極大トーラス T は $T=\boldsymbol{r}(T^l)$ にとっているから，$L(T^l)$ の座標をそのまま $\boldsymbol{r}$ を使って $L(T)$ で

も用いる．$L(SO(2l))=\{A\in M(2l,\boldsymbol{R})\,|\,{}^tA+A=O\}$ は

$$S(r,s)=E_{rs}-E_{sr}\quad(1\leq r<s\leq 2l)$$

を基底にもつ．$L(SO(2l))$ は

$$V_0=L(T)\quad(\{S(r,r+l)\ (1\leq r\leq l)\}\ を基底にもつ)$$

$$V_{rs}=\{x(S(r,s)+S(r+l,s+l))+y(S(r,s+l)-S(s,r+l))\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

$$V_{rs}^*=\{x(S(r,s)-S(r+l,s+l))+y(S(r,s+l)+S(s,r+l))\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

に分解され，$z=x+\boldsymbol{i}y$ とみるとき，T の作用は $Sp(l)$ の場合と同様である．

従って，

(4.7) $SO(2l)$ の root は $\{\pm(x_r-x_s),\pm(x_r+x_s)\,|\,1\leq r<s\leq l\}$ である．

[$G=SO(2l+1)$] $SO(2l)\times 1\subset SO(2l+1)$ と見て $SO(2l)$ と同様に考えるとき，$L(SO(2l+1))$ は V_0, V_{rs}, V_{rs}^* の外に

$$V_r=\{xS(r,2l+1)+yS(r+l,2l+1)\,|\,x,y\in\boldsymbol{R}\}$$

という直和因子があり，T の V_r への作用は，$z=x+\boldsymbol{i}y$ について，

$$S'(r,z)=xS(r,2l+1)+yS(r+l,2l+1)$$

とおくとき，$S'(r,z)\longmapsto S'(r,e^{2\pi\boldsymbol{i}x_r}z)$ で与えられる．よって，

(4.8) $SO(2l+1)$ の root は $\{\pm x_r\ \ (1\leq r\leq l);\ \pm(x_r-x_s),\ \pm(x_r+x_s)\ (1\leq r<s\leq l)\}$ である．

[$G=\mathrm{Spin}(n)$; $n=2l,2l+1$]

定理 4.9 被覆群 $(\tilde{G},p,G)$ において，$\tilde{G},G$ はコンパクト連結 Lie 群とする．$\tilde{G}$ の極大トーラス $\tilde{T}$ と G の極大トーラス T は，$p(\tilde{T})=T$, $p^{-1}(T)=\tilde{T}$ によって，1 対 1 に対応し，$dp: L(\tilde{T})\to L(T)$ は同型対応である．

dp によって，$L(\tilde{T})=L(T)$ とみるとき，$\tilde{G}$ と G の root は一致し，$\Gamma(\tilde{G})\subset\Gamma(G)$ および $\Gamma(G)/\Gamma(\tilde{G})\cong\mathrm{Ker}\,p$ である．

[証明] まず，p は局所同相であるから，$dp: L(\tilde{G})\cong L(G)$. $\tilde{G}$ のトーラス $\tilde{T}$ に対して，$T=p(\tilde{T})$ は G のトーラスで，$L(\tilde{T})=L(T)$ とみるとき，それらからえられる一次形式 θ_r は一致する．定理 4.2 によって，$\tilde{T}$ が極大$\Longleftrightarrow T$ が極大，そして root は一致する．定理 3.21 を使えば，$p(\tilde{T})=T$ が極大$\Longrightarrow \tilde{T}=p^{-1}(T)$ がわかる．その他は容易である． (終)

第 2 章定理 4.14 の証明のように，$L(T)$ の原点と $(a_1,\cdots,a_l)\in\boldsymbol{Z}^l=\Gamma(SO(n))$ を結ぶ線分の exp による像は，$\pi_1(SO(n))\cong\boldsymbol{Z}_2$ の生成元の $\sum a_i$ 倍を表わし，

(4.10) $\Gamma(\mathrm{Spin}(n))$ はその座標の和が偶数となる $\Gamma(SO(n))$ の点よりなる.

正則元と特異元

G の元 g について, $N(g)=Z(g)$ で, これは G の閉部分群であるから, コンパクト Lie 群である. これに関して次の定義をおく.

定義 $\dim Z(g)=\mathrm{rank}\, G$ となる G の元 g は**正則**であるという. 正則でない G の元は**特異**であるという.

G の任意の元は少くとも 1 つの極大トーラスに含まれる(定理 3.15)から, つねに $\dim Z(g)\geq \mathrm{rank}\ G$ である. 従って,

(4.11) $$g\in G \text{ は特異} \Longleftrightarrow \dim Z(g)>\mathrm{rank}\, G$$

補題 4.12 G の元 g の中心化群の単位元成分 $Z(g)_0$ は g を含む G の極大トーラスの和集合である.

[証明] 明らかに $Z(g)_0$ は g を含む G の極大トーラスをすべて含む. 逆に, $Z(g)_0$ はコンパクト連結 Lie 群であるから, その任意の元 x を含む $Z(g)_0$ の極大トーラス S がある. S と g に補題 3.19 を適用して, x を含む G の極大トーラスの存在がわかる. (終)

定理 4.13 g は正則 $\Longleftrightarrow$ g は唯 1 つの極大トーラスに含まれる.
g は特異 $\Longleftrightarrow$ g を含む極大トーラスが 2 つ以上ある.

[証明] g が唯 1 つの極大トーラス T に含まれるときは, $Z(g)_0=T \Longrightarrow \dim Z(g)=\dim Z(g)_0=\dim T=\mathrm{rank}\ G \Longrightarrow g$ は正則.

g が極大トーラス T_1 および T_2 に含まれ, $T_1\neq T_2$ とする. $L(T_1)=L(T_2)$ ならば exp によって $T_1=T_2$ であるから, $L(T_1)\neq L(T_2)$. 補題 4.12 によって $T_1\cup T_2\subset Z(g)$ であるから, $L(Z(g))\supset L(T_1)+L(T_2) \Longrightarrow \dim Z(g)>\dim L(T_1)=\mathrm{rank}\, G \Longrightarrow g$ は特異. (終)

以下, 断りのない限り T は G の 1 つの極大トーラス, $l=\mathrm{rank}\, G=\dim T$ とする.

記号 $U_r=\mathrm{Ker}(\bar{\theta}_r : T\to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$. ただし, $\bar{\theta}_r$ は G の root $(r=1, 2, \cdots, m)$.

$\bar{\theta}_r\neq 0$ であるから, $\dim U_r=l-1$, $(U_r)_0$ はトーラスである. $U_r/(U_r)_0$ は 1 次元トーラス $T/(U_r)_0$ の有限部分群であるから巡回群である. 補題 3.4 によって,

(4.14) U_r は単生成な $l-1$ 次元の T の閉部分群である.

U_r は連結とは限らない(例 : $Sp(1)$ において, $U_1=\{0, 1/2 \pmod 1\}$).

定理 4.15 T の元 t が丁度 ν 個の U_r に属しているとき,

$$\dim Z(t) = l+2\nu$$

[証明] $V=\{X\in L(G) \mid Ad(t)X=X\}$ とする. 定理 4.1 によって,

$$V = V_0 \oplus \sum_{t\in U_r} V_r \Longrightarrow \dim V = l+2\nu$$

$V=L(Z(t))$ を示せばよい. $Z(t)$ の元と t は可換であるから, A_t は $Z(t)$ に, 従って $Ad(t)$ は $L(Z(t))$ に恒等写像として作用する. 故に, $L(Z(t))\subset V$.

$X\in V$ とすると, $t\exp(\alpha X)t^{-1}=\exp(\alpha Ad(t)X)=\exp(\alpha X)$, $\alpha\in \boldsymbol{R}$. 従って, $\exp(\alpha X)\in Z(t) \Longrightarrow X\in L(Z(t))$. (終)

系 4.16 T の元 t は正則 $\Longleftrightarrow$ t はどの U_r にも属さない.

T の元 t は特異 $\Longleftrightarrow$ t はある U_r に属する.

Lie 群 G の随伴表現

$$Ad : G \longrightarrow GL(L(G)) \quad (\Longleftrightarrow Ad(g)=d_e A_g,\ \ A_g(x)=gxg^{-1})$$

を考える. 1 助変数部分群 $\exp(\alpha X)$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$, と $g\in G$ について, $g\exp(\alpha X)g^{-1}$ も 1 助変数部分群で, その初期ベクトルは $Ad(g)X$ である. 1 助変数部分群は初期ベクトルで定まるから,

(4.17) $$g(\exp X)g^{-1}=\exp(Ad(g)X), \quad X\in L(G),\ g\in G$$

定理 4.18 コンパクト連結 Lie 群 G の中心 $Z(G)$ は次のように与えられる.

(1) $Z(G)=\mathrm{Ker}\, Ad=\{g\in G \mid Ad(g)=1\}$ (これは連結 Lie 群 G で成立.)

(2) $Z(G)=\bigcap_{r=1}^{m} U_r=\{t\in T \mid \bar{\theta}_r(t)=e$ (単位元) $(r=1, 2, \cdots, m)\}$

[証明] (1) $g\in Z(G) \Longrightarrow A_g=1_G \Longrightarrow Ad(g)=1 \Longleftrightarrow g\in \mathrm{Ker}\, Ad$. 逆に, $Ad(g)=1$ ならば, (4.17) より, $g(\exp X)=(\exp X)g$. exp は局所同相で, 連結な G は単位元の近傍で生成されるから, 任意の $x\in G$ について $gx=xg$. 故に, $g\in Z(G)$.

(2) まず, $T\subset G$ であるから $Z(G)\subset Z(T)=T$ である. 従って, $Ad(g)$ は定理 4.1 で与えられ, $Ad(g)=1 \Longleftrightarrow \bar{\theta}_r(t)=e$ $(r=1, 2, \cdots, m)$. 故に, (1) より, $Z(G)=\bigcap_{r=1}^{m} U_r$. (終)

Weyl 群と root, weight

定義 整格子 $\Gamma(G)$ を $\boldsymbol{Z}$ に写す一次形式（準同型）$\lambda: L(T)\to\boldsymbol{R}$ を（G の）**weight** という．

root $\pm\theta_r: L(T)\to\boldsymbol{R}$ はもちろん weight である．

$L(T)$ は $\boldsymbol{R}$ 上 $\Gamma=\Gamma(G)$ で張られるから，$\lambda|\Gamma$ は λ および λ で誘導される $\bar{\lambda}: T\,(=L(T)/\Gamma)\to\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ を定める．また，同型 $H_1(T)\cong\pi_1(T)\overset{\partial}{\cong}\pi_0(\Gamma)=\Gamma$ によって，λ と $\bar{\lambda}_*: H_1(T)\to H_1(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})\cong\boldsymbol{Z}$ は同一視される．さらに，同型 $H^1(T)\cong\mathrm{Hom}(H_1(T),\boldsymbol{Z})$ によって，$\bar{\lambda}_*\in H^1(T)$ と思える．以上のことから，

(4.19) $\{T\text{ の weight}\}=\mathrm{Hom}(\Gamma,\boldsymbol{Z})=\mathrm{Hom}(T,\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})=H^1(T)$ （同一視）

Weyl 群 $W(G)=N(T)/T$ の元 $\varphi: T\to T$ について，φ の weight λ への作用は次によって定義する：

(4.20) $$\varphi(\lambda)=\lambda\circ d\varphi^{-1}: L(T)\longrightarrow L(T)\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

明らかに，$(\varphi\varphi')(\lambda)=\varphi(\varphi'(\lambda))$ であり，

(4.20)′ Weyl 群は weight の置換をひきおこす．

定理 4.21 Weyl 群の作用は root を root へ写す．

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\ \varphi^{-1}\ } & T \\ \downarrow{\scriptstyle Ad} & & \downarrow{\scriptstyle Ad} \\ \mathrm{Aut}L(G) & \xrightarrow{\ \varphi^*\ } & \mathrm{Aut}L(G) \end{array}$$

［証明］ $\varphi=nT$, $n\in N(T)$, とする．右図において，$\varphi^*(f)=Ad(n)^{-1}\circ f\circ Ad(n)$ とおけば，可換性は容易にわかる．定理 4.1(1) の直交分解 $L(G)=V_0\oplus\sum V_r$ について，$Ad(n)^{-1}V_0=V_0$ かつ $Ad(n)^{-1}V_r$ は $\varphi^*\circ Ad=Ad\circ\varphi^{-1}$ の作用で不変な $L(G)$ の直交分解を与える．定理 4.1(2)によって，$\varphi(\theta_r)=\theta_r\circ\varphi^{-1}$ は root である． （終）

補題 4.22 各 U_r に対して，U_r の各元を固定し，T では恒等的でない $W(G$ の元 φ_r が存在する．

［証明］ u を U_r の生成元とすると，$U_r\subset T\subset Z(u)_0$. $Z(u)_0$ の元は u, 従って，U_r の元と可換であるから，U_r は $Z(u)_0$ の正規閉部分群である．補題 3.25 を $G=Z(u)_0$, $H=U_r$ に適用して，

$$T/U_r \text{ は } Z(u)_0/U_r \text{ の極大トーラス，} \quad W(Z(u)_0/U_r)\cong W(Z(u)_0)$$

T/U_r は 1 次元であるから，補題 3.26 により，$Z(u)_0/U_r$ の次元は 1 または 3 で，3 の場合は $W(Z(u)_0/U_r)\cong\boldsymbol{Z}_2$ となる．定理 4.15 により，$u\in U_r\Longrightarrow \dim Z(u)_0\geq l+2$. よって，$\dim Z(u)_0=l+2$ かつ $W(Z(u)_0)\cong\boldsymbol{Z}_2$. $W(Z(u)_0)$

の生成元を φ_r とすれば，補題の性質をみたすことは容易にわかる． （終）

系 4.23 φ_r は T に属さない $N(T)\cap Z(U_r)_0$ の元で表わされる．

系 4.24 U_r の成分の個数は高々 2 である．

［証明］ φ_r の $T/(U_r)_0\cong U(1)$ への作用は自明でない $\Longrightarrow \varphi_r(t)=t^{-1}\Longrightarrow$ 不動点の数は 2. $U_r/(U_r)_0$ は φ_r で各点が不変だから，高々 2 点より成る． （終）

定理 4.25 $s\neq r$ ならば，θ_s と θ_r は一次独立である．

［証明］ 補題 4.22 の証明で， U_r を $(U_r)_0$, u を $(U_r)_0$ の生成元 v でおきかえると， 全く同様にして，$\dim Z(v)=l+2$ がえられる． 定理 4.15 は $v\in U_r$, $v\notin U_s$ $(s\neq r)$ を示している．$\bar{\theta}_r(U_r)=e\Longrightarrow\theta_r(L(U_r))\in\boldsymbol{Z}\Longrightarrow\theta_r(L(U_r))=0$. 一方，$\exp^{-1}(v)\subset U_r$ について $\theta_s(\exp^{-1}(v))\neq 0$. 故に θ_s は θ_r のスカラー倍ではない．同様に，θ_r は θ_s のスカラー倍でなく，定理がえられる． （終）

系 4.26 $s\neq r$ ならば，$\dim(U_r\cap U_s)=l-2$.

局所図式と Weyl 群

定義 $D'(G)=\bigcup_{r=1}^{m}L(U_r)$ を G の**局所図式**， 各 $L(U_r)$ を $D'(G)$ の**超平面**という．$L(T)-D'(G)$ の各連結成分 $\mathcal{F}$ を **Weyl 領域**という．1 つの Weyl 領域の閉包と 1 つの超平面 $L(U_r)$ の共通集合が $l-1$ 次元のとき， この共通集合をこの Weyl 領域の**壁**という．

Weyl 領域およびその閉包や壁はすべて有界でない凸集合であり， その 1 つに 1 点 $\boldsymbol{x}$ が属するとき，$t\boldsymbol{x}$ $(t>0)$ もそれに属する．Weyl 領域の壁の和集合はその Weyl 領域の境界である． 1 つの Weyl 領域 $\mathcal{F}$ は適当な $\varepsilon_r=\pm 1$ によって，

$$\mathcal{F}=\{t\in L(T)\,|\,\varepsilon_r\theta_r(t)>0\ ;\ r=1,2,\cdots,m\}$$

と表わされる．ただし，ε_r のとり方によってはこの集合が空になることもある．

補題 4.22 の元 $\varphi_r\in W(G)$ の $L(T)$ への作用を考えると，超平面 $L(U_r)$ を固定する直交変換であって，しかも恒等変換ではない．よって，

(4.27) φ_r の作用は超平面 $L(U_r)$ に関する鏡映である．

また，定理 4.21 より，

(4.28) Weyl 群の元は Weyl 領域の置換をひきおこす．

補題 4.29 (1) $X \in L(T)$ と $\psi \in W(G)$ について，$\psi(X)=X$ かつ $\psi \neq 1$ (単位元)ならば，X はある超平面 $L(U_r)$ に属する.

(2) $W(G)$ の元 ψ が，ある Weyl 領域 $\mathscr{F}$ について $\psi\mathscr{F}=\mathscr{F}$ ならば $\psi=1$.

［証明］ (1) $\psi=nT$, $n \in N(T)$, とすると $\exp(\alpha X)=\psi(\exp(\alpha X))=n(\exp(\alpha X))n^{-1} \Longrightarrow n$ は 1 助変数部分群 $H=\{\exp(\alpha X) \mid \alpha \in \boldsymbol{R}\}$ の各元と可換．補題 3.19 によって，n と H を含む極大トーラス T' がある．$\psi \neq 1 \Longrightarrow n \notin T \Longrightarrow T \neq T'$. $\exp X \in H \subset T \cap T'$ であるから，定理 4.13 と系 4.16 によって，ある r について，$\exp X \in U_r \Longrightarrow X \in L(U_r)$.

(2) $W(G)$ は有限群であるから，正整数 q があって $\psi^q=1$. $\mathscr{F}$ は凸集合であるから，$X \in \mathscr{F} \Longrightarrow \psi^i X \in \mathscr{F} \Longrightarrow \dfrac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\psi^i X \in \mathscr{F}$. $\dfrac{1}{q}\sum\psi^i X$ は ψ で不変であり，どの $L(U_r)$ にも属さないから，(1)によって $\psi=1$ である. (終)

定理 4.30 (1) $W(G)$ は Weyl 領域を単純推移的(推移的かつ効果的)に置換する.

(2) 任意の Weyl 領域 $\mathscr{F}$ について，$W(G)$ は $\mathscr{F}$ の各壁に関する鏡映を含み，このような鏡映は $W(G)$ を生成する.

(3) $X \in L(T)$ について，X の安定化群 $W_X=\{\varphi \in W(G) \mid \varphi X=X\}$ は，閉包が X を含むような Weyl 領域を単純推移的に置換する.

(4) Weyl 領域 $\mathscr{F}$ について，$X \in \overline{\mathscr{F}}-\mathscr{F}$ ならば，上の W_X は X を含む $\mathscr{F}$ の壁に関する鏡映を含み，このような鏡映は W_X を生成する.

［証明］ (1), (2)はそれぞれ(3), (4)において $X=0$ とおいてえられる.

(3) 効果的であることは補題 4.29(2)による．2つの Weyl 領域 $\mathscr{F}_0$, $\mathscr{F}'$ について $X \in \overline{\mathscr{F}}_0 \cap \overline{\mathscr{F}}'$ とし，$X_0 \in \mathscr{F}_0$, $X' \in \mathscr{F}'$ を考える．$r \neq s$ のとき $L(U_r) \cap L(U_s)$ は $l-2$ 次元であるから，X_0 と X' を結ぶ線分を少しずらして次のような条件をみたす折線で X_0 と X' を結ぶことができる：

(a) どの $L(U_r) \cap L(U_s)$ とも交わらない.

(b) X を含まない $L(U_r)$ とは交わらない.

(c) 各 $L(U_r)$ に接することはない.

この折線が順次 $L(U_{r_1}), \cdots, L(U_{r_k})$ を横切って，$\mathscr{F}_0$ から $\mathscr{F}_1, \cdots, \mathscr{F}_k=\mathscr{F}'$ に達したとするとき，$\varphi_{r_k}\cdots\varphi_{r_2}\varphi_{r_1}$ は $\mathscr{F}_1, \cdots, \mathscr{F}_{k-1}$ を通って $\mathscr{F}_0$ を $\mathscr{F}'$ へ写す．即ち，W_X は推移的に作用する.

(4)　前半は(4.27)より明らか．$\psi\in W_X$ について，$\psi(\mathscr{F})=\mathscr{F}'$ とし，(3)のように $\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}'$ へ写す $\varphi_{r_k}\cdots\varphi_{r_1}$ をとれば，$\psi^{-1}\varphi_{r_k}\cdots\varphi_{r_1}$ は $\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}$ へ写すから，補題4.29(2)によって，$\psi=\varphi_{r_k}\cdots\varphi_{r_1}$ がわかる．ここで，$L(U_{r_i})$ は X を含むが $\mathscr{F}$ の壁であるとは限らない．$\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1}$ $(1\leq s\leq k)$ が X を含む $\mathscr{F}$ の壁に関する鏡映の積で書けることを s に関する帰納法で示す．$s=1$ のときは自明．$s<k$ で成り立ったとする．(3)において，$L(U_{r_{s+1}})$ は $\mathscr{F}_s$ の壁で，$(\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1})^{-1}$ は $\mathscr{F}_s$ を $\mathscr{F}$ へ写し，$L(U_{r_{s+1}})$ を $\mathscr{F}$ の壁 $L(U_m)$ で X を含むものに写す．そのとき，$\varphi_{r_{s+1}}$ と $\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1}\varphi_m(\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1})^{-1}$ はともに $\mathscr{F}_s$ を $\mathscr{F}_{s+1}$ へ写すから一致する．故に，$\varphi_{r_{s+1}}\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1}=\varphi_{r_s}\cdots\varphi_{r_1}\varphi_m$ は X を含む $\mathscr{F}$ の壁に関する鏡映で書ける．従って，(4)は帰納法で証明された．　(終)

系 4.31　$L(T)$ の1点 X の $W(G)$ による軌道と各 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ の閉包との共通部分 $W(G)\cdot X\cap\overline{\mathscr{F}}$ は丁度1点から成る．

［証明］　$X\in\overline{\mathscr{F}}_0$ のとき，$\psi\mathscr{F}_0=\mathscr{F}$ となる ψ をとれば，$\psi(X)\in W(G)\cdot X\cap\overline{\mathscr{F}}$．

$X, \varphi(X)\in\overline{\mathscr{F}}$ とする．$X\in\varphi^{-1}\overline{\mathscr{F}}$ で，W_X はこのような $\mathscr{F}, \varphi^{-1}\mathscr{F}$ に推移的に作用するから，$\varphi^{-1}\mathscr{F}=\sigma^{-1}\mathscr{F}$ となる $\sigma\in W_X$ がある．$\varphi^{-1}\mathscr{F}=\sigma^{-1}\mathscr{F}\Longrightarrow\varphi^{-1}=\sigma^{-1}\Longrightarrow\varphi=\sigma$．また，$\sigma(X)=X$ であるから，$\varphi(X)=\sigma(X)=X$．即ち，$W(G)\cdot X\cap\overline{\mathscr{F}}$ は1点である．　(終)

§5　コンパクト連結 Lie 群の基本群と分解

Stiefel 図式と拡大 Weyl 群

コンパクト連結 Lie 群 G の root $\theta_r : L(T)\to\boldsymbol{R}$ に関して次の記号を使う．

記号　$L_r=\theta_r^{-1}(\boldsymbol{Z})=\exp^{-1}(U_r)$

$L_{r,n}=\theta_r^{-1}(n),\ \ n\in\boldsymbol{Z}$

$\varphi_{r,n} : L(T)\to L(T)$ は $L_{r,n}$ に関する鏡映．

特に，$L_{r,0}=L(U_r)$ および $\varphi_{r,0}=\varphi_r\in W(G)$ である．

定義　$D(G)=\bigcup_{r=1}^{m}L_r=\bigcup_{r=1}^{m}\bigcup_{n\in\boldsymbol{Z}}L_{r,n}$ を G の **Stiefel 図式**，

各 $L_{r,n}$ を Stiefel 図式 $D(G)$ の**超平面**，

$L(T)-D(G)$ の各連結成分 $\varDelta$ を **Weyl 胞体**という．

Weyl 胞体は $L(T)$ における開凸集合で，その境界は $D(G)$ の一部である．

Weyl 胞体 Δ の閉包と $D(G)$ の１つの超平面 $L_{r,n}$ の共通部分が $l-1$ 次元の(即ち，$L_{r,n}$ の内点を含む)とき，この共通部分 $\bar{\Delta}\cap L_{r,n}$ を Weyl 胞体 Δ の**面**という．また，このとき $L_{r,n}$ を Δ の**壁**という．Weyl 胞体の境界はその面の和集合である．

定義　Stiefel 図式 $D(G)$ の超平面 $L_{r,n}$ に関する鏡映 $\varphi_{r,n}$ で生成される $L(T)$ の合同変換群を**拡大 Weyl 群**といい，$\overline{W}(G)$ で表わす．

定理 5.1　拡大 Weyl 群 $\overline{W}(G)$ の元 w は Stiefel 図式 $D(G)$ を $D(G)$ に写す合同変換である．従って，$w\in\overline{W}(G)$ は $D(G)$ の超平面を $D(G)$ の超平面に写す．

［証明］　$\varphi_{r,n}$ を誘導する φ：$T\to T$ について，右図は可換である．φ は内部自己同型で与えられるから定理 4.13 によって，特異元を特異元に写す．即ち

$$\begin{array}{ccc} L(T) & \xrightarrow{\varphi_{r,n}} & L(T) \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ T & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

$\varphi(\cup U_i)=\cup U_i$．$\cup L_i=\exp^{-1}(\cup U_i)$ であるから，$\varphi_{r,n}(D(G))=D(G)$．従って，合同変換 $\varphi_{r,n}$ は $D(G)$ の超平面を超平面に写す．$\varphi_{r,n}$ は $\overline{W}(G)$ を生成するから，定理がえられる．　　(終)

系 5.2　$\overline{W}(G)$ の元は Weyl 胞体の間の合同変換を与える．

補題 5.3　$L(T)$ における $\mathfrak{z}=L(Z(G))$ の直交補空間を L' とし，$L(T)=\mathfrak{z}\times L'$ と表わすとき，G の Weyl 胞体 Δ は $\Delta=\mathfrak{z}\times(\Delta\cap L')$ をみたし，$\Delta\cap L'$ は有界な凸多面体の内部である．

［証明］　$\theta_r(\mathfrak{z})=0\Longrightarrow\mathfrak{z}\subset L_{r,n}\Longrightarrow L_{r,n}=\mathfrak{z}\times(L_{r,n}\cap L')$．$\mathfrak{z}$ の連結性より，$\Delta=\mathfrak{z}\times(\Delta\cap L')$ がえられる．定理 4.18(2) より容易に，

$$\mathfrak{z}=L(Z(G))=\{X\in L(T)\mid\theta_r(X)=0\} \tag{5.3$'$}$$

がえられる．$\Delta\cap L'$ が有界でなければ，それに含まれる半直線 A があり，$\theta_r(A)=0$ $(\forall r)$，または，ある r があって $\theta_r|A$ は恒等的には 0 ではない．前者の場合は $A\subset\mathfrak{z}$ となり矛盾．また，後者の場合も，$\theta_r|A$ の値は有界でないからある点で整数値をとり，その点は U_r に属することになり矛盾．従って，$\Delta\cap L'$ は有界である．　　(終)

定理 5.4　拡大 Weyl 群 $\overline{W}(G)$ は $D(G)$ の Weyl 胞体の間の単純推移的な置換をひきおこす．

［証明］　1つの面を共有する2つの Weyl 胞体は，その面を含む超平面に関

する鏡映で写される．Weyl 胞体とその面の内部の和集合を U とすると，$L(T)-U$ は $l-2$ 次元以下であるから，U は弧状連結．従って，2 つの Weyl 胞体 $\varDelta$, $\varDelta'$ に対して，Weyl 胞体の列 $\varDelta=\varDelta_0, \varDelta_1, \cdots, \varDelta_n=\varDelta'$ で，$\varDelta_i$ と $\varDelta_{i+1}$ は 1 つの面を共有するようなものがある．従って，これらの面を含む超平面に関する鏡映の積によって，$\varDelta$ は $\varDelta'$ に写される．故に，$\overline{W}(G)$ の作用は推移的である．

すべての Weyl 胞体をそれ自身に写す元 $\varphi\in\overline{W}(G)$ を考える．$\varphi|\mathfrak{z}=1_{\mathfrak{z}}$ であるから，$\varphi|\varDelta=1_{\mathfrak{z}}\times(\varphi|\varDelta\cap L')$．また，各 $\varDelta\cap L'$ は合同であるからその直径 $d>0$ は一定で，任意の $X\in\varDelta$，従って任意の $X\in L(T)$ について，X と $\varphi(X)$ の距離は d 以下である．このような合同変換 φ は平行移動しかない．一方，$\varDelta$ と $\varDelta'$ が面を共有すれば，$\varDelta, \varDelta'$ はそれぞれ自分自身へ写されるから面もそれ自身へ写される．このことから，$\varDelta\cap L'$ の頂点はそれ自身へ写されることがわかる．従って，$\varphi=1$ となり，$\overline{W}(G)$ の作用は効果的である．（終）

反転 root と平行移動

簡単のために，$L(T)$ の双対空間を

$$L(T)^*=\mathrm{Hom}(L(T), \boldsymbol{R})$$

と書く．root や weight は $L(T)^*$ の元である．$L(T)$ は有限次元であるから，

$$L(T)\cong\mathrm{Hom}(L(T)^*, \boldsymbol{R})$$

定義　G の root θ_r に対して，$\varphi_{r,1}$（超平面 $L_{r,1}$ に関する鏡映）による原点 $\mathbf{0}$ の像を $\theta_r{}^*=\varphi_{r,1}(\mathbf{0})\in L(T)$ とおき，θ_r の**反転 root** という．

容易にわかるように，$\varphi_r\in W(G)$ について，

(5.5)　$\theta_r{}^*$ は次の式で一意的に定まる：

$$\varphi_r(\theta_r{}^*)=-\theta_r{}^*, \quad \theta_r(\theta_r{}^*)=2$$

定理 5.6　(1)　任意の $X\in L(T)$ について，$\varphi_r(X)=X-\theta_r(X)\theta_r{}^*$.

(2)　root $\theta_i\in L(T)^*$ について，$\varphi_r(\theta_i)=\theta_i-\theta_i(\theta_r{}^*)\theta_r$（これも root).

［証明］　(1)　$X=a\theta_r{}^*+Y$, $a\in\boldsymbol{R}$, $Y\in L_{r,0}$ と分解され，$\varphi_r(Y)=Y$ であるから，$\varphi_r(X)=-a\theta_r{}^*+Y=X-2a\theta_r{}^*$．一方，$\theta_r(Y)=0$ であるから，$\theta_r(X)=a\theta_r(\theta_r{}^*)=2a$．故に，$\varphi_r(X)=X-\theta_r(X)\theta_r{}^*$.

(2)　$\varphi_r=\varphi_r{}^{-1}$ であるから，(4.20) により，$(\varphi_r(\theta_i))X=\theta_i(\varphi_r(X))=\theta_i(X-\theta_r(X)\theta_r{}^*)=(\theta_i-\theta_i(\theta_r{}^*)\theta_r)X$．故に，$\varphi_r(\theta_i)=\theta_i-\theta_i(\theta_r{}^*)\theta_r$.　（終）

記号　$\Gamma_0=\Gamma_0(G)=$(反転 root $\theta_r{}^*$ で生成される部分群)$\subset L(T)$

定理 5.1 の証明における可換図式から，

$$\exp(\theta_r{}^*)=\exp(\varphi_{r,1}(\mathbf{0}))=\varphi_r(\exp\ \mathbf{0})=\varphi_r(e)=e$$

よって，

$$\Gamma_0\subset\Gamma=\Gamma(G)=\exp^{-1}(e) \tag{5.7}$$

Γ や Γ_0 の元 Y は，$L(T)$ に平行移動

$$X\longmapsto X+Y,\quad X\in L(T)$$

で作用するから，Γ や Γ_0 は $L(T)$ の合同変換群とみなせる．

記号　$\overline{\overline{W}}(G)=$($\Gamma$ と $\overline{W}(G)$ で生成される合同変換群)

定理 5.8　(1)　$\overline{\overline{W}}(G)$ の元は $D(G)$ (の超平面)を $D(G)$ (の超平面)へ写す．

(2)　右の可換図によって，準同型対応

$$\pi:\overline{\overline{W}}(G)\longrightarrow W(G)\Longleftrightarrow\pi(w)=\varphi$$

が定義され，$\Gamma=\mathrm{Ker}\,\pi$ である．

$$\begin{array}{ccc} L(T) & \xrightarrow{w} & L(T) \\ \downarrow{\scriptstyle\exp} & & \downarrow{\scriptstyle\exp} \\ T & \xrightarrow{\varphi} & T \end{array}$$

(3)　$\overline{\overline{W}}(G)=\Gamma\cdot W(G)$ (半直積)

(4)　$w\in\overline{\overline{W}}(G)$ と $Y\in\Gamma\subset L(T)$ について，$w(Y)\equiv Y \pmod{\Gamma_0}$.

(5)　$\overline{\overline{W}}(G)=\Gamma_0\cdot W(G)$ (半直積)

［証明］　(1)　$Y\in\Gamma$ とすると $\exp(Y)=e$ であるから，$X\in L_r\Longrightarrow\exp(X)\in U_r\Longrightarrow\exp(X+Y)=\exp(X)\in U_r\Longrightarrow X+Y\in L_r$. 故に，$\Gamma$ の元は $D(G)$ を $D(G)$ へ写す．$\overline{W}(G)$ の元については定理 5.1 ですでに知られている．

(2)　$\overline{W}(G)$の元については φ の一意的存在が知られている．$w\in\Gamma$ については明らかに $\pi(w)=1_T$ で，$\Gamma\subset\mathrm{Ker}\,\pi$. Γ と $\overline{W}(G)$ で生成される $\overline{\overline{W}}(G)$ についても π が定義されて準同型であることは明らかである．$w\in\mathrm{Ker}\,\pi$ ならば $\pi(w)=1_T$. $\exp(w(\mathbf{0}))=\exp(\mathbf{0})=e\Longrightarrow Y=w(\mathbf{0})\in\Gamma$. Y を平行移動とみるとき，$\pi(Y)=1_T$. w と Y は共に被覆変換で $\mathbf{0}$ の値が一致するから $w=Y\in\Gamma$ (第 2 章§1). 故に，$\Gamma=\mathrm{Ker}\,\pi$.

(3)　完全系列 $1\longrightarrow\Gamma\longrightarrow\overline{\overline{W}}(G)\xrightarrow{\pi}W(G)$ において，$\varphi:T\longrightarrow T$ ($\varphi\in W(G)$) に $d\varphi:L(T)\longrightarrow L(T)$ を対応させて，π の切断がえられるから，$\overline{\overline{W}}(G)$ は正規部分群 $\Gamma=\mathrm{Ker}\,\pi$ と $W(G)$ の半直積である．

(4)　平行な 2 つの超平面に関する鏡映の合成は平行移動であり，$\varphi_{r,n}\varphi_r(\mathbf{0})=\varphi_{r,n}(\mathbf{0})=n\theta_r{}^*$ であるから，

(5.9)　$$n\theta_r{}^* = \varphi_{r,n}\varphi_r \in \overline{W}(G) \quad (n \in \boldsymbol{Z};\ r=1,2,\cdots,m)$$

また，$\varphi_{r,n} = (n\theta_r{}^*)\varphi_r{}^{-1} = (n\theta_r{}^*)\varphi_r$ に定理 5.6 (1) を適用して，

(5.10)　$$\varphi_{r,n}(X) = X + (n - \theta_r(X))\theta_r{}^* \quad (X \in L(T))$$

$Y \in \Gamma \Longrightarrow \theta_r(Y) \in \boldsymbol{Z}$ であるから，$\varphi_{r,n}(Y) \equiv Y \pmod{\Gamma_0}$．$\varphi_{r,n}$ は $\overline{W}(G)$ を生成するから，(4) がえられる．

(5)　$\bar{\pi} = \pi | \overline{W}(G)$ とおけば，$\mathrm{Ker}\,\bar{\pi} = \mathrm{Ker}\,\pi \cap \overline{W}(G) = \Gamma \cap \overline{W}(G)$ であるから (3) と同様にして，$\overline{W}(G) = (\Gamma \cap \overline{W}(G)) \cdot W(G)$（半直積）．よって，

$$\Gamma_0 = \Gamma \cap \overline{W}(G)$$

をいえばよい．(5.9) より，$\theta_r{}^* = \varphi_{r,1}\varphi_r \in \overline{W}(G) \Longrightarrow \Gamma_0 \subset \overline{W}(G)$．(5.7) を使って，$\Gamma_0 \subset \Gamma \cap \overline{W}(G)$．(5.10) によって，$\overline{W}(G)$ の元 w は Γ_0 を Γ_0 へ写す．さらに，$w \in \Gamma$ ならば平行移動であるから $w \in \Gamma_0$．故に，$\Gamma \cap \overline{W}(G) \subset \Gamma_0$．（終）

系 5.11　$$\Gamma/\Gamma_0 \cong \overline{\overline{W}}(G)/\overline{W}(G) \quad (\text{全単射})$$

コンパクト連結 Lie 群の基本群

記号　$G_R = \{G\ \text{の正則元}\}$，　$T_R = G_R \cap T = \{T\ \text{の正則元}\}$

$$L(T)_R = \exp^{-1}(T_R) = L(T) - D(G)$$

補題 5.12　$G - G_R$ は，その次元が高々 $\dim G - 3$ である有限個の微分多様体の，C^∞-写像による像の和集合である．

［証明］　u を U_r の生成元とすれば，定理 4.15 により $\dim Z(u) \geq l+2$．$Z(u)$ の各元は u の巾と可換，従って，U_r の各元と可換で C^∞-写像

$$f_r : (G/Z(u)) \times U_r \longrightarrow G \Longleftrightarrow f_r(g \cdot Z(u),\ t) = gtg^{-1}$$

が定義されて，$\mathrm{Im}\, f_r = \bigcup_{g \in G} gU_rg^{-1}$ である．定理 4.13 と極大トーラスの共役性より，$G - G_R = \bigcup_{r=1}^{m} \mathrm{Im}\, f_r$ がわかる．$\dim((G/Z(u)) \times U_r) = \dim G - \dim Z(u) + (l-1) \leq \dim G - 3$．（終）

系 5.13　$$\pi_1(G_R) \cong \pi_1(G)$$

［証明］　任意の C^∞-写像 $h: I \to G$（または $H: I \times I \to G$）の像が $G_S = G - G_R$ とある一点で交わるとき，ある方向に少し h（または H）をずらすことによって，x の近傍では G_S と交わらないような方向があることが次元の関係からわかる．このことを使って，$\pi_1(G)$ の元を表わす閉道やそのホモトピーを G_R の中でとることができる．（この考え方は定理 4.30，定理 5.19 の証明に使われてい

る.)　　　　(終)

次の2つの写像を考える：

$$\bar{f}:(G/T)\times T\longrightarrow G \Longleftrightarrow \bar{f}(gT,t)=gtg^{-1}$$
$$f:(G/T)\times L(T)\longrightarrow G \Longleftrightarrow f=\bar{f}\circ(1\times\exp)$$

Weyl 群 $W(G)$ の $(G/T)\times T$ への作用を

$$\varphi(gT,\ t)=(gn^{-1}T,\ \varphi(t)),\quad \varphi=[n]\in w(G),\quad n\in N(T)$$

群 $\overline{\overline{W}}(G)$ の $(G/T)\times L(T)$ への作用を

$$w(gT,X)=(gn^{-1}T,\ w(X)),\quad w\in\overline{\overline{W}}(G),\quad \pi(w)=[n]$$

で定義するとき，容易に次の等式をうる：

(5.14)　　$\bar{f}(\varphi(gT,t))=\bar{f}(gT,t),\quad f(w(gT,X))=f(gT,X)$

補題 5.15　(1)　$\bar{f}$ は $W(G)$-バンドルの射影 $\bar{f}_R:(G/T)\times T_R\to G_R$ を与える.

(2)　f は $\overline{\overline{W}}(G)$-バンドルの射影 $f_R:(G/T)\times L(T)_R\to G_R$ を与える.

［証明］　(1)　$G=\cup gTg^{-1}$, $gG_Rg^{-1}=G_R$ より $G_R=\cup gT_Rg^{-1}$. 故に，$\bar{f}_R$ が定義されて全射. $\varphi(gT,t)=(gT,t)$ ならば $tn=nt$. t は正則元であるから，$n\in T\Longrightarrow\varphi=1$. 故に，$W(G)$ は不動点なしに作用し，$\bar{f}_R$ は商空間 $(G/T)\times_{W(G)}T_R$ から G_R への全射を誘導することは(5.14)よりわかる.

$\bar{f}(gT,t)=\bar{f}(g_1T,t_1)$ とすると，$g_1^{-1}gtg^{-1}g_1=t_1\in T$. 定理 3.18 によって，$t_1=ntn^{-1}$ となる $n\in N(T)$ がある. よって，$(g^{-1}g_1n)t=t(g^{-1}g_1n)$. t は正則$\Longrightarrow g^{-1}g_1n\in T$. $\varphi=[n]$ とおくと，$\varphi(gT,t)=(g_1T,t_1)$. 結局，多様体の間の全単射 $(G/T)\times_{W(G)}T_R\to G_R$ がえられ，これは同相写像である. $W(G)$ は有限であるから，$\bar{f}_R$ は $W(G)$-バンドルの射影となる.

(2)　(1)と $1\times\exp:(G/T)\times L(T)_R\to(G/T)\times T_R$ が $\Gamma(G)$-バンドルの射影であることから，$f_R=\bar{f}_R\circ(1\times\exp)$ は $\overline{\overline{W}}(G)=\Gamma(G)\cdot W(G)$-バンドルの射影であることがわかる.　　　　(終)

定理 5.16　G/T は1-連結である.

［証明］　$\pi_0(G)=0\Longrightarrow\pi_0(G/T)=0$. $L(T)_R$ の1点 X_0 をとり，合成写像

$$h: G/T\xrightarrow{\times X_0}G/T\times L(T)_R\xrightarrow{f_R}G_R\xrightarrow{i}G$$

を考えると，$h(gT)=gt_0g^{-1}$, $t_0=\exp X_0$, である. t_0 と単位元を T で結ぶ道を考えると $h\simeq0$. 一方，$\times X_0$ は直和因子への射入，f_R は被覆写像，i は

系 5.13 によって，それぞれ π_1 の単射を誘導するから，$h_*:\pi_1(G/T)\to\pi_1(G)$ は単射．$h\simeq 0 \Longrightarrow h_*=0$．故に，$\pi_1(G/T)=0$．（終）

系 5.17　射入 i で誘導される $i_*:\pi_1(T)\to\pi_1(G)$ は全射である．

補題 5.18　同型 $\partial:\pi_1(T)\cong\Gamma$ について，$i_*(\partial^{-1}\Gamma_0)=0$．

［証明］　原点と Γ_0 の生成元 $\theta_r{}^*$ を結ぶ道 $\tilde{l}:I\to L(T)$ $(\Longleftrightarrow \tilde{l}(t)=t\theta_r{}^*)$ とその exp による像 $l:(I,\partial I)\longrightarrow(G,e)$ $(\Longleftrightarrow l(t)=\exp(t\theta_r{}^*))$ について，$i_*\partial^{-1}(\theta_r{}^*)=[l]$ であるから，$l\simeq 0$ を示せばよい．

$\varphi_{r,1}$ は，中点 $\tilde{l}(1/2)\in L_{r,1}$ に関する点対称として，線分 $\tilde{l}$ に作用するから，

$$\varphi_r(l(t))=l(1-t) \quad かつ \quad l(1/2)\in U_r.$$

系 4.23 により，$n\in N(T)\cap Z(U_r)_0$ があって $\varphi_r=[n]$．$h:I\to Z(U_r)$ を $h(0)=n$ と $h(1)=e$ を結ぶ道とすると，$h(\theta)l(1/2)h(\theta)^{-1}=l(1/2)$ $(0\le\theta\le 1)$ である．従って，ホモトピー l_θ が

$$l_\theta:(I,\partial I)\longrightarrow(G,e) \Longleftrightarrow l_\theta(t)=\begin{cases} l(t) & (0\le t\le 1/2) \\ h(\theta)l(t)h(\theta)^{-1} & (1/2\le t\le 1)\end{cases}$$

で定義され，$l=l_0\simeq l_1$．$l_1(t)=l_1(1-t)$ がみたされるから，$l_{2-\theta}(t)=l_{2-\theta}(1-t)=l_1(\theta t)$ $(0\le t\le 1/2)$ は $0=l_2\simeq l_1$ を示す．故に，$l\simeq 0$．（終）

定理 5.19　$i_*\circ\partial^{-1}:\Gamma\cong\pi_1(T)\to\pi_1(G)$ は次の同型を誘導する：

$$\Gamma/\Gamma_0\cong\pi_1(G)$$

［証明］　補題 5.18 によって，$i_*\circ\partial^{-1}$ は準同型 $\lambda:\Gamma/\Gamma_0\to\pi_1(G)$ を誘導し，系 5.17 によって λ は全射である．故に，任意の $\gamma\in\Gamma$ について，$i_*(\partial^{-1}(\gamma))=0 \Longrightarrow \gamma\in\Gamma_0$ を示せばよい．まず，次を示そう：

(5.20)　Weyl 胞体 Δ があって，閉包 $\bar{\Delta}$ は原点および $\gamma\cdot\Gamma_0$ の代表元 γ を含む．

実際，代表元 γ を原点に最も距離の近い点にとる．$\theta_r(\gamma)$ は整数である．$\theta_r(\gamma)>1$ ならば，$\varphi_{r,1}(\gamma)$ は γ より原点に近い．定理 5.8(4)により $\varphi_{r,1}(\gamma)$ も $\gamma\cdot\Gamma_0$ の代表元で，これは γ のとり方に反するから，$\theta_r(\gamma)\le 1$．同様に，$\theta_r(\gamma)\ge -1$．従って，$\theta_r(\gamma)=1,0,-1$．$\bar{\Delta}$ は $L(T)$ を覆っているから，原点 $\mathbf{0}$ と γ を結ぶ線分（または点）$\overline{\mathbf{0}\gamma}$ の内点と交わる $\bar{\Delta}$ がある．$\overline{\mathbf{0}\gamma}$ の内点を通る $D(G)$ の超平面は原点を通るものしかないから，$\overline{\mathbf{0}\gamma}\subset\bar{\Delta}$．従って，(5.20)がいえる．

$\mathbf{0}$ に十分近い Δ の点 P，γ に十分近い Δ の点 Q をとれば，$\overline{\mathbf{0}\gamma}$ と $\overline{\mathbf{0}P}+\overline{PQ}$

$+\overline{Q\gamma}$ で表わされる道はホモトープで，l_0, l, l_1 をそれぞれ $\overline{0P}$, $\overline{PQ}$, $\overline{Q\gamma}$ の exp による像とすれば，$[l_0 l l_1]=i_*(\partial^{-1}\gamma)=0$ であり，l_0, l_1 は e の可縮な近傍 U_ε に入り，l は G_R に入っている．$x_0=\exp P$, $y_0=\exp Q$ とおくと，x_0 と y_0 を $U_\varepsilon \cap G_R$ 内で結ぶ道 k がある(補題 5.12)．U_ε は可縮 $\Longrightarrow k\simeq l_0^{-1}l_1^{-1}\simeq l_0^{-1}(l_0 l l_1)l_1^{-1}\simeq l$. $\pi_1(G_R, x_0)\cong\pi_1(G, x_0)$ (系 5.13)によって，G_R の中で $k\simeq l$ である．補題 5.15(2)のバンドルの射影

$$f_R : (G/T)\times L(T)_R \longrightarrow G_R$$

を考える．$X\mapsto (T, X)$ によって，$L(T)_R\subset (G/T)\times L(T)_R$ と考える．f_R のファイバー $\overline{\overline{W}}(G)$ は離散位相をもつから，P を始点とする道 k, l のリフト $\tilde{k}, \tilde{l}$ は一意的で，$k\simeq l$ より $\tilde{k}$ と $\tilde{l}=\overline{PQ}$ の終点は一致する．(実際，$\tilde{k}, \tilde{l}$ は $(G/T)\times \varDelta$ の道で，$f_R : (G/T)\times\varDelta\to G_R$ は(普遍)被覆空間である．) ε を十分小さくとれば，$\tilde{k}$ も十分小さい範囲に入らなければならないから，P と Q の距離はいくらでも小さくならなければならない．$\mathbf{0}\neq\gamma$ ならばこのようなことはありえないから，$\gamma=\mathbf{0}\in\varGamma_0$. 結局，定理は証明された．　(終)

コンパクト Lie 群の Lie 環

連結な Lie 群 G およびその Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ の随伴表現

$$Ad : G\to GL(\mathfrak{g}), \qquad ad : \mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

を考える．ここで，次が成り立っていることに注意する(第2章§5)：

(5.21)　$Ad(\exp X)=\exp(ad\, X)$, $\quad [X, Y]=\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{t}\{Ad(\exp tX)Y-Y\}$

補題 5.22　$[X, Y]=0 \quad (X, Y\in\mathfrak{g}) \Longleftrightarrow \exp tX\exp sY=\exp sY\exp tX$

$(\forall s, t\in\boldsymbol{R})$

[証明]　まず，(5.21)を使って，

$(*)$ $\exp tX\exp sY(\exp tX)^{-1}=\exp(s\cdot Ad(\exp tX)Y)=\exp(s\cdot\exp(t\cdot adX)Y)$

$[X, Y]=0$ ならば，$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ において，$\exp(t\cdot ad\, X)Y=\sum\dfrac{t^i}{i!}(ad\, X)^i Y=Y$ であるから，$(*)$の右辺は $\exp sY$ となり，$\exp tX\exp sY=\exp sY\exp tX$ がえられる．

逆に，この最後の等式が成り立つとき，$(*)$より，$\exp(s\cdot\exp(t\cdot ad\, X)Y)=\exp sY$. 従って，初期ベクトルを考えて，$\exp(t\cdot ad\, X)Y=Y$. (5.21)の第2式によって，$[X, Y]=0$ となる．　(終)

定理 5.23　$Z(G)$ の Lie 環は $\mathfrak{z}=\mathrm{Ker}\, ad=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[X, Y]=0,\ \ \forall Y\in\mathfrak{g}\}$ で与えられる．

［証明］　$L(Z(G))=\{X\in\mathfrak{g}\,|\exp X\in Z(G)\}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\exp tX\cdot g=g\cdot\exp tX,\ \forall t\in \boldsymbol{R},\ \forall g\in G\}$．$g=\exp sY$ を考えると，補題 5.22 より $L(Z(G))\subset\mathrm{Ker}\, ad$.

逆の包含関係は，定理 4.18 (1)の証明の後半と同じ理由で，補題 5.22 よりえられる．（終）

定義　$\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ の Lie 部分環である $ad(\mathfrak{g})$ の $\exp:\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\longrightarrow GL(\dim G, \boldsymbol{R})$ による像 $\exp(ad(\mathfrak{g}))$ を $Ad(\mathfrak{g})$ と表わし，Lie 環 $\mathfrak{g}$ の**随伴群**という．$Ad: G\to GL(\mathfrak{g})$ の像 $Ad(G)$ を Lie 群 G の**随伴群**という．

定理 5.23, (5.21)および定理 4.18 より，

(5.24)　$$ad(\mathfrak{g})\cong\mathfrak{g}/\mathfrak{z},\quad Ad(\mathfrak{g})\cong Ad(G)\cong G/Z(G)$$

(5.24)′ $Ad(G)$ は Lie 環 $L(G)$ で定まり，$Z(Ad(G))=0$.

系 2.2 により，随伴表現 $Ad: G\to GL(\mathfrak{g})$ は完全可約であるから，

(5.25)　$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\oplus\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{g}_i$$

と分解し，$Ad|\mathfrak{g}_i$, $1\leq i\leq k$, は既約な表現であり，$\mathfrak{g}_0$ は Ad により不変なベクトル全体より成る．従って，$\mathfrak{g}_i$ は単純 Lie 環である．

ここで，随伴表現 Ad の微分は $\mathfrak{g}$ の随伴表現 $ad:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ で，これも同一の既約分解をもつ．各 $\mathfrak{g}_i$ は ad で不変，$\mathfrak{g}_0$ は ad で固定される元より成る：

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i,\quad \mathfrak{g}_0=\mathfrak{z}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,[X, \mathfrak{g}]=0\}$$

特に，　$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_i,\ \ [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j]=0\ (i\neq j).$$

補題 5.26　$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_i\quad (1\leq i\leq k)$$

［証明］　Jacobi 恒等式によって，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]$ は $\mathfrak{g}$ の，従って $\mathfrak{g}_i$ のイデアルとなることがわかる．$ad|\mathfrak{g}_i$ は既約表現であるから，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]\neq\mathfrak{g}_i$ ならば $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]=0$. 従って，$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]=0\Longrightarrow\mathfrak{g}_i\subset\mathfrak{z}=\mathfrak{g}_0$ となり矛盾である．故に，$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i]=\mathfrak{g}_i$.（終）

結局，コンパクト Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ について，

(5.27)　Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ は中心 $\mathfrak{z}$ と単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ の直和に分解される：

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{z}\oplus\sum_{i=1}^{k}\mathfrak{g}_i$$

定義　G は**単純** $\Longleftrightarrow$ G の Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ は単純.

G は**半単純** $\Longleftrightarrow$ G の Lie 環 $\mathfrak{g}=L(G)$ は半単純（単純 Lie 環の直和）.

(5.25)の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ について，G の Lie 部分群 $G_i=\exp\mathfrak{g}_i$ を G の**単純因子**という．(5.24)と(5.27)によって，

(5.28)　$Ad(G)$ は半単純である．

コンパクト連結 Lie 群の分解

まず，半単純 Lie 群について次の特徴づけがある．

定理 5.29　コンパクト連結 Lie 群 G について，次の各条件は同値である：

(1)　G は半単純．

(2)　$\mathfrak{z}=L(Z(G))=0$

(3)　$Z(G)$ は有限．

(4)　$Ad: G\to Ad(G)$ は被覆群．

(5)　G の root $\{\theta_r\}$ は $\boldsymbol{R}$ 上で $L(T)^*$ を張る．

(6)　root $\{\theta_r\}$ で生成される $H^1(T)$ の部分群の指数は有限．

(7)　G の反転 root $\{\theta_r^*\}$ は $\boldsymbol{R}$ 上で $L(T)$ を張る．

(8)　各 Weyl 胞体は有界(な開凸多面体)である．

(9)　$\pi_1(G)$ $(\cong H_1(G))$ は有限．

(10)　$H^1(G)=0$

(11)　G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ はコンパクトである．

[証明]　[(1)$\Longleftrightarrow$(2)]は(5.27)より，[(2)$\Longleftrightarrow$(3)]は自明，[(3)$\Longleftrightarrow$(4)]は(5.24)よりえられる．定理 4.18 (2)を使えば[(3)$\Longleftrightarrow$(5)]がえられる．(4.19)を使って[(5)$\Longleftrightarrow$(6)]がわかる．[(5)$\Longleftrightarrow$(7)]は自明．補題 5.3 より，[(2)$\Longleftrightarrow$(8)]がえられる．θ_r^* で生成される Γ_0 について，(7)と $L(T)/\Gamma_0$ がコンパクト(従ってトーラス)であることは同値．Γ/Γ_0 は $L(T)/\Gamma_0$ 内の離散部分群であるから，定理 5.19 を使って，(7)$\Longrightarrow\Gamma/\Gamma_0\cong\pi_1(G)$ は有限，即ち(9)．逆に，Γ は $L(T)$を張るから，(9)$\Longrightarrow$(7)．[(9)$\Longleftrightarrow$(10)]は普遍係数定理より出る．(11)$\Longleftrightarrow$被覆度数は有限$\Longleftrightarrow$(9)．　(終)

定理 5.30　G をコンパクト連結 Lie 群とするとき，その単純因子 $G_i=\exp\mathfrak{g}_i$ は G の正規閉部分 (Lie) 群である．このとき，G の積によってえられる

$$f: Z(G)_0\times G_1\times\cdots\times G_k\longrightarrow G$$

は有限被覆度数の被覆群で，その核は中心に含まれる有限群である．

［証明］ $Ad(G)$ は半単純であるから，その普遍被覆群を $\tilde{G}$ とすれば $\tilde{G}$ はコンパクトである．$\tilde{G}$ の Lie 環は $\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$ と同型．$G_i'=\exp\mathfrak{g}_i$ は $\tilde{G}$ の連結正規部分群で，第2章(5.14)によって閉部分群，従ってコンパクトである．G_i' は(半)単純であるから，その普遍被覆群 $\tilde{G}_i$ もコンパクトである．$\tilde{G}_i$ は1-連結であるから，$\mathfrak{g}_i\hookrightarrow\mathfrak{g}$ に対応する局所準同型は $\tilde{G}_i\to G$ に拡張され，$\tilde{G}_i$ の像は G_i である．従って，G の単純因子 G_i はコンパクト，即ち閉部分群である．$\mathfrak{g}_i$ はイデアル $\Longrightarrow G_i$ は正規.

$g\in G_i$，$h\in G_j$ $(i\neq j)$ に対して，$ghg^{-1}h^{-1}\in G_i\cap G_j$．$g$ と h が単位元の近傍の元であれば，$ghg^{-1}h^{-1}=e$，即ち $gh=hg$．G_i, G_j は連結で，近傍で生成されるからそれらの元は互いに可換となる．故に，Lie 群の準同型 $f: Z_0(G)\times G_1\times\cdots\times G_k\to G$ が積によって定義され，Lie 環の同型を誘導するから f は局所同型である．$\exp:\mathfrak{g}\to G$ は全射である(系3.17)から，f も全射で，被覆写像となる．$Z(G)$ は可換な閉部分群であるから $Z(G)_0$ はトーラスである．従って，$Z(G)_0\times G_1\times\cdots\times G_k$ はコンパクトで，定理がえられる．　(終)

系 5.31　任意のコンパクト連結 Lie 群 G に対して，トーラス T とコンパクト単純1-連結 Lie 群 $\tilde{G}_1,\cdots,\tilde{G}_k$ および $T\times\tilde{G}_1\times\cdots\times\tilde{G}_k$ の中心 $T\times Z(\tilde{G}_1)\times\cdots\times Z(\tilde{G}_k)$ に含まれる有限群 K が存在して，

$$(T\times\tilde{G}_1\times\cdots\times\tilde{G}_k)/K\cong G\quad(\text{同型})$$

単純 Lie 群と root

G の極大トーラス T への随伴表現の制限 $Ad|T$ による Lie 環 $L(G)$ の直交分解

$$L(G)=L(T)\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_m\quad(\dim V_r=2)$$

と root $\theta_r: L(T)\to\boldsymbol{R}$ を考える．$Ad(t)=\begin{pmatrix}\cos 2\pi\theta_r(t) & -\sin 2\pi\theta_r(t)\\ \sin 2\pi\theta_r(t) & \cos 2\pi\theta_r(t)\end{pmatrix}$ の微分を(5.21)の第2式を使って計算すれば，次の結果がえられる：

(5.32)　$Z\in L(T)$，$Y\in V_r$ について，$[Z, Y]=2\pi\begin{pmatrix}0 & -\theta_r(Z)\\ \theta_r(Z) & 0\end{pmatrix}(Y)$.

上の $\mathfrak{g}=L(G)$ の分解を

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{m},\qquad \mathfrak{t}=L(T),\ \mathfrak{m}=\sum_{r=1}^{m}V_r$$

と書くことにする．$Z\in\mathfrak{t}=L(T)$ について，次が成り立つ：

補題 5.33 $Z\in L(T)-D'(G) \Longleftrightarrow \mathfrak{m}=(ad\ Z)(\mathfrak{m})$．特に，$\mathfrak{m}=[\mathfrak{t},\mathfrak{m}]$．

［証明］ $Z\in L(T)-D'(G)$ とすれば，$\theta_r(Z)\neq 0$ だから，任意の $X_r\in V_r$ に対して，$[Z, Y_r]=X_r$ となる $Y_r\in V_r$ の存在が(5.32)よりわかる．r に関する和を考えて，$\mathfrak{m}\subset(ad\ Z)(\mathfrak{m})\subset[\mathfrak{t},\mathfrak{m}]$．また，(5.32)より $[\mathfrak{t},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$，従って $\mathfrak{m}=(ad\ Z)(\mathfrak{m})$．逆に，$Z\in D'(G)$ のときは，$\theta_r(Z)=0$ となる r について，$V_r\not\subset[Z,\mathfrak{m}]$ である． (終)

$Ad\ g$，$g\in G$，は内積を変えないから，

$$(Ad(\exp tX)Y, Z)=(Y, Ad(\exp(-tX))Z)$$

である．これに，(5.21)の第2式を適用して，次の関係式がえられる：

$$(5.34)\qquad ([X, Y], Z)+(Y, [X, Z])=0 \qquad (X, Y, Z\in\mathfrak{g})$$

定理 5.35 可換でない G が単純であるための必要十分条件は，$Ad|T$ が分解されないこと，即ち $L(T)=\mathfrak{t}=\mathfrak{t}_1\oplus\mathfrak{t}_2$ と直交分解され，root も(適当に順序を変えて) $\theta_i|\mathfrak{t}_2=0$ $(1\leq i\leq k)$，$\theta_j|\mathfrak{t}_1=0$ $(k<j\leq m)$，とならないことである．

［証明］（十分性） 単純でなければ，このような分解のあることは明らかであろう．

（必要性） 分解があったとし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_k\oplus V_{k+1}\oplus\cdots\oplus V_m$ において

$$\mathfrak{m}_1=V_1\oplus\cdots\oplus V_k,\quad \mathfrak{m}_2=V_{k+1}\oplus\cdots\oplus V_m$$

とおく．明らかに，$[\mathfrak{t}_i,\mathfrak{t}_j]=0$．(5.32)を使えば，次のことがわかる：

$$[\mathfrak{t}_i,\mathfrak{m}_i]\subset\mathfrak{m}_i\ (i=1,2),\quad [\mathfrak{t}_i,\mathfrak{m}_j]=0\quad (i\neq j)$$

任意の $X_1\in\mathfrak{m}_1$ に対して，$X_1=[Z_1+Z_2, Y_1+Y_2]$ となる $Z_i\in\mathfrak{t}_i$，$Y_i\in\mathfrak{m}_i$ がある(補題 5.33)．上の性質から，$X_1=[Z_1, Y_1]+[Z_2, Y_2]$，$[Z_i, Y_i]\in\mathfrak{m}_i$．よって，$X_1=[Z_1, Y_1]$．任意の $X_2\in\mathfrak{m}_2$ に対して，Jacobi 恒等式より，

$$[X_1, X_2]=[[Z_1, Y_1], X_2]=[Z_1, [Y_1, X_2]]+[[Z_1, X_2], Y_1]=[Z_1, [Y_1, X_2]]$$

ここで，$[Y_1, X_2]\in\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{m}_1\oplus\mathfrak{m}_2$ と分解すれば，$[Z_1, [Y_1, X_2]]\in[\mathfrak{t}_1, \mathfrak{m}_1]\subset\mathfrak{m}_1$ がわかる．X_1 と X_2 を入れかえて，同様に $[X_1, X_2]\in\mathfrak{m}_2$．故に，$[X_1, X_2]=0$，即ち，$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2]=0$．

任意の $X_1, Y_1\in\mathfrak{m}_1$ と $X_2\in\mathfrak{t}_2\oplus\mathfrak{m}_2$ に対して，(5.34)を使って，

$$([X_1, Y_1], X_2)=-(Y_1, [X_1, X_2])=-(Y_1, 0)=0$$

X_2 は任意だから，$[X_1, Y_1]\in\mathfrak{t}_1\oplus\mathfrak{m}_1$，即ち，$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1]\subset\mathfrak{t}_1\oplus\mathfrak{m}_1$．

$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{t}_i\oplus\mathfrak{m}_i$ とおけば，$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1]=[\mathfrak{t}_1,\mathfrak{t}_1]+[\mathfrak{t}_1,\mathfrak{m}_1]+[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_1]\subset\mathfrak{t}_1\oplus\mathfrak{m}_1=\mathfrak{g}_1$，$[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2]=[\mathfrak{t}_1,\mathfrak{t}_2]+[\mathfrak{t}_1,\mathfrak{m}_2]+[\mathfrak{t}_2,\mathfrak{m}_1]+[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]=0$．また，$[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2]\subset\mathfrak{g}_2$．故に，$\mathfrak{g}$ はイデアル $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2$ の直和で，単純ではない． (終)

§6 単純 root と Dynkin 図式

root の内積

root や weight は $L(T)$ から $\boldsymbol{R}$ への準同型 (一次形式) であるが，これらを双対空間 $L(T)^*=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{R}}(L(T),\boldsymbol{R})$ のベクトルと考え，$L(T)$ 上に表示するのが便利である．即ち，$L(T)$ における $W(G)$-不変な内積 $(\ ,\ )$ を用いて定義される

$$\iota : L(T)\longrightarrow L(T)^* \Longleftrightarrow \iota(X)Y=(X,Y)\quad (X,Y\in L(T))$$

は同型対応となる．この ι によって，$L(T)^*$ にも自然に内積が与えられる．即ち，$h,h'\in L(T)^*$ に対して，

$$(h,h')=(\iota^{-1}(h),\iota^{-1}(h'))=h(\iota^{-1}(h'))$$

また，$W(G)$ の作用は(4.20)で与えられて内積を保つ．

(6.1) $\boldsymbol{v}\in L(T)$ が $\theta=\iota(\boldsymbol{v})\in L(T)^*$ に対応しているとき，超平面 $\theta=0$ に直交し，半空間 $\theta>0$ の方向の長さ 1 のベクトルを $\boldsymbol{e}$ とすれば，$\boldsymbol{v}=\theta(\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$.

(6.1)′ 反転 root $\theta_r{}^*$ について，$\theta_r=\frac{1}{2}(\theta_r,\theta_r)\iota(\theta_r{}^*)$.

root θ_r に対応する元 $\varphi_r\in W(G)$ は，$\theta_r=0$ に関する鏡映として $L(T)$ に作用する．$\varphi_r=\varphi_r{}^{-1}$ であるから，$L(T)^*$ には $h\mapsto h\circ\varphi_r$ で作用する．(6.1)によって，

(6.2) $\varphi_r : L(T)^*\to L(T)^*$ は $\varphi_r(\theta_r)=-\theta_r$ をみたす鏡映である．

定理 6.3 (1) $h\in L(T)^*$ について，$\varphi_r(h)=h-(2(\theta_r,h)/(\theta_r,\theta_r))\theta_r$.

(2) h が weight (または root) であれば $\varphi_r(h)$ も weight (または root) であり，$2(\theta_r,h)/(\theta_r,\theta_r)$ は整数である．

[証明] (1)は(6.2)を式で表示したに過ぎない．(2)の前半は(4.20)′ および定理 4.21 と同じである．$\theta_r(X)=1$ をみたす $X\in L(T)$ を選べば，$\exp X\in U_r$. φ_r は U_r を動かさないから，$X-\varphi_r(X)$ は整格子に属する $\Longrightarrow h(X-\varphi_r(X))$ は整数．よって，$2(\theta_r,h)/(\theta_r,\theta_r)=h(X)-h(X)+(2(\theta_r,h)/(\theta_r,\theta_r))\theta_r(X)=h(X)-$

$\varphi_r(h(X))$ も整数である．　　　　（終）

定理 6.4　$\alpha \neq \pm\beta$ である root α, β の間の関係は次のいずれかである：

(0)　α と β は垂直．

(1)　α と β は $60°$ または $120°$ の角をなし，α と β の長さは等しい．

(2)　α と β は $45°$ または $135°$ の角をなし，長さの比は $\sqrt{2}$ または $1/\sqrt{2}$．

(3)　α と β は $30°$ または $150°$ の角をなし，長さの比は $\sqrt{3}$ または $1/\sqrt{3}$．

次の定理と同時に証明を行なう．

定理 6.5　α, β は $\alpha \neq \pm\beta$ をみたす root とするとき，$0 \leq k \leq -2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ をみたす整数 k について，$\beta + k\alpha$ もまた root である．

［定理 6.4, 定理 6.5 の証明］　$a_\alpha = -2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$，$a_\beta = -2(\alpha, \beta)/(\beta, \beta)$ とおくと，これらは整数である（定理 6.3(2)）．α と β の間の角 ω について，$\cos^2\omega = (1/4)a_\alpha a_\beta$ が成り立つ．$\alpha \neq \pm\beta \Longrightarrow 0 < \omega < 180° \Longrightarrow 0 \leq 4\cos^2\omega = a_\alpha a_\beta < 4$．

$(\alpha, \beta) = 0$ のときは，定理 6.4(0) の場合であり定理 6.5 は自明．

$(\alpha, \beta) \neq 0$ とすると，$a_\alpha a_\beta$ は $1, 2$ または 3 である．必要ならば α を $-\alpha$ におきかえて，$(\alpha, \beta) < 0$，即ち a_α, a_β は正としてよい．

$a_\alpha = a_\beta = 1$ とする．このとき，$\varphi_\alpha(\beta) = \beta + a_\alpha\alpha = \beta + \alpha$ も root で，定理 6.5 は正しく，$|\alpha|^2 = a_\alpha(\alpha, \alpha) = -2(\alpha, \beta) = a_\beta(\beta, \beta) = |\beta|^2$．故に α と β の長さは等しく，$\cos\omega = (\pm 1/2)\sqrt{a_\alpha a_\beta} = \pm 1/2 \Longrightarrow \omega = 60°, 120° \Longrightarrow$ 定理 6.4(1)．

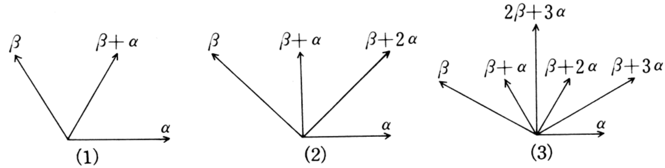
$a_\alpha = 2$ とする．$a_\beta = 1$ でなければならないから，$2|\alpha|^2 = a_\alpha(\alpha, \alpha) = -2(\alpha, \beta) = |\beta|^2$．故に，$|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$，$\cos\omega = \pm 1/\sqrt{2} \Longrightarrow \omega = 45°$ または $135° \Longrightarrow$ 定理 6.4(2)．$\varphi_\beta(\alpha) = \alpha + a_\beta\beta = \alpha + \beta$，$\varphi_\alpha(\beta) = \beta + a_\alpha\alpha = \beta + 2\alpha$ はともに root であり，定理 6.5 がえられる．

$a_\alpha = 3$ とする．$a_\beta = 1$ でなければならないから，$3|\alpha|^2 = -2(\alpha, \beta) = |\beta|^2 \Longrightarrow |\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$，$\cos\omega = \pm\sqrt{3}/2 \Longrightarrow$ 定理 6.4(3)．$\varphi_\beta(\alpha) = \alpha + \beta$，$\varphi_\alpha(\beta) = \beta + a_\alpha\alpha = \beta + 3\alpha$ および $\varphi_\alpha(\beta + \alpha) = \varphi_\alpha(\beta) + \varphi_\alpha(\alpha) = \beta + 3\alpha - \alpha = \beta + 2\alpha$ はすべて root で，定理 6.5 がえられる．

$a_\alpha = 1$，$a_\beta = 2, 3$ の場合，定理 6.5 は α と β を入れかえても変らないから，$a_\alpha = 2, 3$ の場合に帰着される．　　　　（終）

注意 6.6　階数 2 の場合に，定理 6.4 の各場合を与える例はそれぞれ，(0) $SO(4)$，(1) $SU(3)$，(2) $Sp(2), SO(5)$，(3) $G_2 =$（$\boldsymbol{R}$ 上の代数としての Cayley

数体の自己同型群）であり，(1), (2), (3) の root $\pm\theta_r$ の一方 θ_r のみを図示するとそれぞれ下図のようになる：



単純 root

定義 $L(T)$ の1つの Weyl 領域 $\mathscr{F}$ を指定して，それを**基本 Weyl 領域**という．

root $\pm\theta_1, \cdots, \pm\theta_m$ の符号を適当に定めてとり直し，

(6.7) root $\theta_1, \cdots, \theta_m$ は基本 Weyl 領域が $\mathscr{F}=\{X\in L(T)\,|\,\theta_r(X)>0,\ \ r=1, \cdots, m\}$ となるように選ぶことと約束する．

定義 上の約束の下に，$\theta_1, \cdots, \theta_m$ を**正 root**, $-\theta_1, \cdots, -\theta_m$ を**負 root** という．

古典群の場合は次の条件で基本 Weyl 領域を定める ((6.26) 参照)：

(6.8) (1) $G=U(l),\ SU(l)$： $x_1>x_2>\cdots>x_l$ （正 root：x_r-x_s $(r<s)$）

(2) $G=Sp(l), SO(2l+1)$： $x_1>x_2>\cdots>x_l>0$

(3) $G=SO(2l)$： $x_1>x_2>\cdots>x_{l-1}>x_l>-x_{l-1}$

補題 6.9 正 root θ_r について，$\sum_r \lambda_r\theta_r=0,\ \lambda_r\geq 0\ (\forall r) \Longrightarrow \lambda_r=0\ (\forall r)$.

［証明］ $X\in\mathscr{F}$ について，$\sum\lambda_r\theta_r(X)=0,\ \theta_r(X)>0 \Longrightarrow \lambda_r=0$. （終）

定義 α は**単純 root** $\Longleftrightarrow$ α は正 root で2つの正 root の和ではない．

定理 6.10 任意の正 root は単純 root の非負整係数一次結合である．

［証明］ 正 root の和に分けていけば，補題 6.9 によって，有限回で終わる．（終）

系 6.11 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を単純 root (全体) とするとき，基本 Weyl 領域は $\alpha_1>0, \cdots, \alpha_s>0$ で与えられる．

（これ以上減らせぬことは定理 6.14 でわかる．）

定理 6.12 単純 root α に対応する鏡映 φ_α は Weyl 群 $W(G)$ を生成する．

［証明］ root γ が root α, β の和であるとき，定理 6.4, 定理 6.5 の証明のように，$\gamma=\varphi_\alpha(\beta)$ または $\gamma=\varphi_\beta(\alpha)$ である．$\gamma=\varphi_\alpha(\beta) \Longrightarrow \varphi_\gamma=\varphi_\alpha\varphi_\beta\varphi_\alpha$ であるか

ら，定理 6.10 と定理 4.30(2) より定理がえられる． (終)

補題 6.13 α, β が相異なる単純 root ならば $(\alpha, \beta) \leq 0$ である．

［証明］ (α, β) を正とすると，$-2(-\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ は正の整数となるから，定理 6.5 により，$\beta-\alpha$ は root $\Longrightarrow \beta-\alpha$ または $\alpha-\beta$ は正 root $\Longrightarrow \beta=(\beta-\alpha)+\alpha$ または $\alpha=(\alpha-\beta)+\beta$ は単純 root ではなくなり，仮定に反する． (終)

定理 6.14 単純 root は一次独立である．

［証明］ 単純 root の一次結合が 0 であるとする．負の係数の項を移項すれば，$\sum \mu_i \alpha_i = \sum \nu_j \beta_j$ ($\mu_i \geq 0$, $\nu_j \geq 0$; α_i, β_j は相異なる単純 root) となる．この元を γ とおくと，$(\gamma, \gamma) = \sum \mu_i \nu_j (\alpha_i, \beta_j) \leq 0 \Longrightarrow \gamma = 0$．補題 6.9 によって，$\mu_i = \nu_j = 0$．即ち，最初の一次結合の係数はすべて 0 である． (終)

定理 6.15 θ_r を単純 root とするとき，φ_r は θ_r を $-\theta_r$ に写し，θ_r 以外の正 root の置換を与える．

［証明］ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ を単純 root，θ_t を正 root とすると $\theta_t = n_1\alpha_1 + \cdots + n_s\alpha_s$, $n_i \geq 0$, と書ける (定理 6.10)．$\theta_r = \alpha_j$ とすると $\varphi_r(\theta_t) = \theta_t - 2((\theta_t, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j))\alpha_j$ と θ_t は α_j の係数のみ異なる．故に，$\theta_t \neq \theta_r$ ならば $n_i > 0$ となる $i \neq j$ がある．$\varphi_r(\theta_t)$ は root で，正 root または負 root であるが，定理 6.10 によって，$n_i > 0$ となる $i \neq j$ があれば正 root でなければならない． (終)

定理 6.16 (1) 任意の root はある単純 root から Weyl 群の作用によってえられる．

(2) 次の 3 条件をみたす最小の集合 M は root 全体と一致する：

(a) 単純 root は M に属する．

(b) α が M に属するとき，$-\alpha$ も M に属する．

(c) α, β が M に属し $\beta \neq \pm\alpha$ ならば，$0 \leq k \leq -2(\alpha, \beta)/(\alpha, \alpha)$ をみたす整数 k について $\beta + k\alpha$ も M に属する．

［証明］ (1) root θ_r に対して $L(U_r)$ を壁とする Weyl 領域を考える．定理 4.30(1) によって，この Weyl 領域を基本 Weyl 領域に写す Weyl 群の元 φ がある．$\varphi(L(U_r))$ は基本 Weyl 領域の壁であるから，それを $L(U_s)$ とするとき，θ_s は単純 root で $\varphi^{-1}\theta_r = \pm\theta_s$ である．$\varphi^{-1}\theta_r = -\theta_s$ ならば，$(\varphi^{-1}\varphi_r)\theta_r = \theta_s$.

(2) 定理 6.5 によって，M は root から成っていることがわかる．(1)によって，Weyl 群の作用が (b), (c) によってえられることをいえばよいが，定理

4.30(2)によって，単純 root $\alpha=\theta_r$ に対応する鏡映 φ_r についていえばよい．

まず，$\varphi_r(\pm\alpha)=\mp\alpha$ は (b) でえられる．$\beta\neq\pm\alpha$ のとき，$\varphi_r(\beta)=\beta-(2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha))\alpha$ は (c) でえられる．（終）

ベクトルの可容系

定義　ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^l$ 内の一次独立な s 個のベクトル $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$ は，

(＊)　$$a_{ij}=-\frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)} \text{ が整数で，} i\neq j \implies a_{ij}\geqq 0$$

をみたすとき，ベクトルの**可容系**であるという．

これは単純 root の系を抽象化したものであることを，定理 6.3(2)，定理6.14 が示している．この定義はベクトルの順序には無関係である．

定義　2 つのベクトルの可容系の間に 1 対 1 対応があって，対応する各対 (i,j) について (＊) の整数が一致するとき，これらの可容系は**同値**であると定義する．

G の単純 root の定義は極大トーラス T と基本 Weyl 領域の選び方によっているが，極大トーラスは内部自己同型で互いに写され，Weyl 領域も Weyl 群の作用で写される．そして，これらの作用は内積を変えず，Weyl 群の作用は 1 つの基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ に関する正 root を $\mathscr{F}$ の写された像を基本 Weyl 領域とする正 root に写す．以上のことから，

(6.17)　G の単純 root は $L(T)\cong\boldsymbol{R}^l$ の中のベクトルの可容系をなし，G に単純 root の可容系の同値類を対応させる対応が一意的に定まる．

定理 6.4 の証明は，root が可容系をなしているという性質しか使っていない．従って，定理 6.4 は可容系の 2 つのベクトルに対して成り立ち，しかも $a_{ij}\geqq 0$ $(i\neq j)$ であるから，定理 6.4 の証明から次がわかる：

(6.18)　ベクトルの可容系の 2 つのベクトル α_i,α_j $(i\neq j)$ と (＊) の整数について，

(1)　a_{ij} と a_{ji} は同時に 0 か，一方が 1 他方が 1, 2 または 3,

(2)　$a_{ji}=1$ とすると，$|\alpha_i|=\sqrt{a_{ij}}\,|\alpha_j|$

(3)　$$\frac{a_{ij}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}=\frac{a_{ji}|\alpha_i|}{|\alpha_j|}=\sqrt{a_{ij}a_{ji}}$$

がつねに成り立つ．

ベクトルの可容系は(6.18)の外にも種々の制限を受ける．それを示すには，次の補題が使われる．

補題 6.19 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ をベクトルの可容系とする．すべては0でない実数 $t_1, t_2, \cdots, t_s$ について，次の不等式が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{s} t_i{}^2 > \sum_{i<j} t_i t_j \sqrt{a_{ij}a_{ji}}$$

［証明］ $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ は一次独立 $\Longrightarrow \alpha = \sum_{i=1}^{s} t_i\alpha_i/|\alpha_i| \neq 0.$

$$0<|\alpha|^2=(\alpha, \alpha)=\sum_{i,j=1}^{s}\frac{t_it_j(\alpha_i, \alpha_j)}{|\alpha_i|\cdot|\alpha_j|}=\sum_{i=1}^{s} t_i{}^2-\frac{1}{2}\sum_{i<j} t_it_j\left(\frac{a_{ij}|\alpha_j|}{|\alpha_i|}+\frac{a_{ji}|\alpha_i|}{|\alpha_j|}\right)$$

に(6.18)(3)を適用して，補題の不等式がえられる． （終）

系 6.20 可容系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ において $a_{ij} \geq 1$ $(i<j)$ となる順序対 (i, j) の個数は高々 $s-1$ である．

［証明］ 補題 6.19 において，$t_i=1$ とおくと $s>\sum_{i<j}\sqrt{a_{ij}a_{ji}}$. (6.18)(1) より $a_{ij}\geq 1$ ならば $\sqrt{a_{ij}a_{ji}}\geq 1$ であるから，系がえられる． （終）

補題 6.21 各 r について，$\sum_{i\neq r} a_{ir}a_{ri} \leq 3.$

［証明］ まず，可容系 $\{\alpha_i, \alpha_j, \alpha_r\}$ に系 6.20 を適用して，

(6.22) $$a_{ir}\geq 1,\ a_{jr}\geq 1\ (i\neq j) \Longrightarrow a_{ij}=0$$

がわかる．補題 6.19 において，$t_r=t$，$a_{ir}\geq 1$ のとき $t_i=\sqrt{a_{ir}a_{ri}}$，$a_{ir}=0$ のとき $t_i=0$ とおく．(6.22) により，$t_it_j\neq 0$ $(i\neq j\neq r\neq i)\Longrightarrow a_{ij}=0$ であるから，$a=\sum_{i\neq r} a_{ir}a_{ri}=\sum_{i\neq r} t_i{}^2$ について，$t^2+a=\sum t_i{}^2>\sum_{i<j} t_it_j\sqrt{a_{ij}a_{ji}}=\sum_{i\neq r} t(\sqrt{a_{ir}a_{ri}})^2=at$. $t=a/2$ とおいて，$a^2/4+a>a^2/2\Longrightarrow 4a>a^2$. a は整数 ≥ 0 だから，$a\leq 3$. （終）

Dynkin 図式

ベクトルの可容系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\}$ から，以下のように構成される1次元複体をこの可容系の **Dynkin 図式**（または **Schläfli 図式**，**Coxeter 図式**）という．コンパクト連結 Lie 群 G の単純 root の作る可容系については，G の **Dynkin 図式**という．

まず，各ベクトル α_i には（∘ で表わす）頂点を対応させる．

$a_{ij}\neq 0$ のときは，α_i と α_j を結ぶ $a_{ij}a_{ji}$ 本の辺（1次元単体）を対応させる．

ただし，α_i と α_j の長さが異なるときには，それらの大小を明示するために，大きい方から小さい方へ矢印を付すことにする．(6.18)によって，部分的には下図のようになる：



$a_{ij}=0\ (=a_{ji})$　　$a_{ij}=a_{ji}=1$　　$a_{ij}=2\ (a_{ji}=1)$　　$a_{ij}=3\ (a_{ji}=1)$

定義　root 系 $\{\pm\theta_1, \cdots, \pm\theta_m\}$ が $L(T)^* \cong \boldsymbol{R}^l$ を張り，それぞれに属する root が直交するような空でない 2 つの部分集合に分かれないとき，この root 系は**既約**であるという．単純 root 系やベクトルの可容系についても，**既約性**を定義する．

次は明らかである：

(6.23)　$\boldsymbol{R}^l$ におけるベクトルの可容系 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ が既約

$\Longleftrightarrow$ その Dynkin 図式は(1 次元多面体として)連結．

ここで，半単純 Lie 環論から次の定理を引用する．

定理 6.24　コンパクト連結 Lie 群 G の局所同型類(Lie 環 $L(G)$ の同型類)とベクトルの可容系の間には (root 系によって) 1 対 1 対応がある．

この定理の証明をここでのべるのは無理であるから，松島与三「リー環論」(共立) 第 9 章を参照されたい．そこでは，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の半単純 Lie 環を主として取り扱っているが，ここでの G の root 系を $2\pi \boldsymbol{i}$ 倍したものとして，$L(G) \otimes \boldsymbol{C}$ における root 系がえられることに注意する．また，複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の Lie 環から実数体 $\boldsymbol{R}$ 上の Lie 環へ戻すには，そのコンパクト実形式をとればよい．

定理 6.25　コンパクト連結単純 Lie 群 G の局所同型類と連結な Dynkin 図式の(矢印もこめた) 1 次元複体としての同型類は，1 対 1 に対応する．

［証明］　定理 5.29，定理 6.24 と定理 5.35 によって，半単純性と root が $L(T)^*$ を張ること，単純性と root 系が既約であることが対応していることがわかる．また，定理 6.10，定理 6.16 を使えば，root 系と単純 root 系が 1 対 1 に対応し，しかも既約性も対応していることがわかる．従って，定理 6.24 と(6.23)より定理がえられる．　(終)

単純 Lie 群の分類

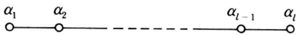
E. Cartan によって分類された単純 Lie 群の Dynkin 図式とそれを実現する root 系を以下に挙げる((4.5)〜(4.8), (6.8)参照).

(6.26)　$\boldsymbol{R}^l=\{(x_1,\cdots,x_l)\}$ 上の双対正規直交基底 $e_i\in\mathrm{Hom}(\boldsymbol{R}^l,\boldsymbol{R})$ を $e_i(x_j)=\delta_{ij}$ で与える.

(A_l-型)　($l\geq 1$; $\boldsymbol{R}^l\cong\boldsymbol{R}^{l+1}|x_1+\cdots+x_{l+1}=0$ 上で)

単純 root : $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leq i\leq l)$

正 root : e_i-e_j $(1\leq i<j\leq l+1)$



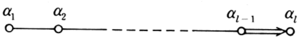
(B_l-型)　($l\geq 2$)

単純 root : $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leq i<l)$,

$\alpha_l=e_l$

正 root : e_i $(1\leq i\leq l)$,

e_i+e_j, e_i-e_j $(1\leq i<j\leq l)$



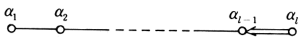
(C_l-型)　($l\geq 2$)

単純 root : $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leq i<l)$,

$\alpha_l=2e_l$

正 root : $2e_i$ $(1\leq i\leq l)$,

e_i+e_j, e_i-e_j $(1\leq i<j\leq l)$

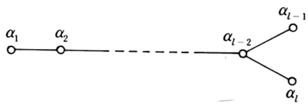


(D_l-型)　($l\geq 3$)

単純 root : $\alpha_i=e_i-e_{i+1}$ $(1\leq i<l)$,

$\alpha_l=e_{l-1}+e_l$

正 root : e_i+e_j, e_i-e_j $(1\leq i<j\leq l)$



(E_l-型)　($l=6,7,8$; $\boldsymbol{R}^6\cong\boldsymbol{R}^8|x_6=x_7=-x_8$, $\boldsymbol{R}^7\cong\boldsymbol{R}^8|x_7=-x_8$, $\boldsymbol{R}^8$ 上で)

単純 root : $\alpha_1=\dfrac{1}{2}(e_1+e_8)-\dfrac{1}{2}(e_2+e_3+e_4+e_5+e_6+e_7)$,

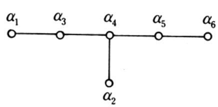
$\alpha_2=e_1+e_2$,　　　$\alpha_i=e_{i-1}-e_{i-2}$ $(3\leq i\leq l)$

正 root :

$(l=6)$ $\dfrac{1}{2}\left(e_8-e_7-e_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}e_i\right)$,

$\sum_{i=1}^{5}\nu(i)$ は偶数 ;

e_i+e_j, $-e_i+e_j$ $(1\leq i<j\leq 5)$

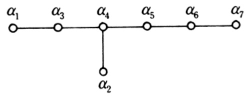


$(l=7)$　$\frac{1}{2}(e_8-e_7+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}e_i)$,

$\sum_{i=1}^{6}\nu(i)$ は奇数；

$\left.\begin{matrix} e_i+e_j, \\ -e_i+e_j \end{matrix}\right\}(1\leq i<j\leq 6)$,

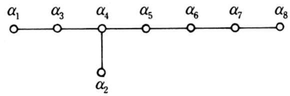
e_8-e_7



$(l=8)$　$\frac{1}{2}(e_8+\sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}e_i)$,

$\sum_{i=1}^{7}\nu(i)$ は偶数；

$\left.\begin{matrix} e_i+e_j, \\ -e_i+e_j \end{matrix}\right\}(1\leq i<j\leq 8)$

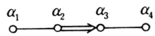


(F_4-型)

単純 root：　$\alpha_1=e_2-e_3$,

$\alpha_2=e_3-e_4$,　　$\alpha_3=e_4$,

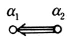
$\alpha_4=\frac{1}{2}(e_1-e_2-e_3-e_4)$



正 root：e_i $(1\leq i\leq 4)$；e_i+e_j,　e_i-e_j $(1\leq i<j\leq 4)$；$\frac{1}{2}(e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)$

(G_2-型)　($\boldsymbol{R}^2\cong\boldsymbol{R}^3 | x_1+x_2+x_3=0$ 上で)

単純 root：　$\alpha_1=e_1-e_2$,　$\alpha_2=-2e_1+e_2+e_3$



正 root：　e_1-e_2,　$-e_1+e_3$,　$-e_2+e_3$,

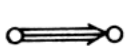
$-2e_1+e_2+e_3$,　$e_1-2e_2+e_3$,　$-e_1-e_2+2e_3$

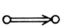
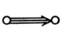
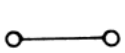
上に挙げた各場合に，与えられた単純 root から定理 6.16 によって拡張して，対応する正 root をもつ root 系がえられる．従って，定理 6.24 によって，

(6.26)′　上に挙げた (A_l)，(B_l)，(C_l)，(D_l)，(E_l)，(F_4)，(G_2) の root 系をもつコンパクト連結単純 Lie 群が存在して，それらは互いに同型ではない．

定理 6.27　単純 Lie 群の局所同型類は (6.26)′ に挙げたものしかない．即ち，連結な Dynkin 図式は (6.26) に挙げたものしかない．

この定理を証明するために若干の補題を用意する．

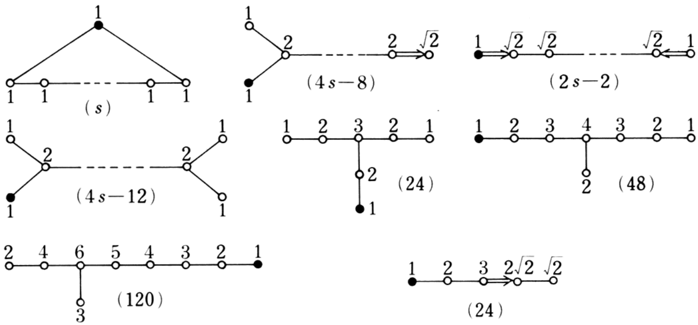
補題 6.28　(1)　連結な Dynkin 図式が  を含めばこれで全体である．

(2)　Dynkin 図式で ， を  でおきかえるとき，閉じた道を含まない (即ち tree である)．

［証明］ (1)　補題 6.21 は各頂点から出る辺の数は高々 3 であることを示しているから，(1)は明らかである．

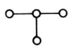
(2)　閉じた道の部分も可容系でなければならないが，辺の数≧頂点の数，となるから系 6.20 に反する．　(終)

補題 6.29　Dynkin 図式は次のような図式をその部分に含まない：



ただし，○⟹○ 等の矢印は逆向きでもよく，○——---——○ の辺の数は 0 でもよい．(数値や●は後程の便宜上与えたものである．)

［証明］ 補題 6.19 の $t_1, t_2, \cdots, t_s$ の値として，補題の各頂点に与えた数値を入れるとき，等式 $\sum t_i{}^2 = \sum_{i<j} t_i t_j \sqrt{a_{ij}a_{ji}}$ が成り立ち，その値は( )内の数値となる．これは補題 6.19 に反するから，上の各図式は可容系に対応せず，(6.18)によって，Dynkin 図式の一部ではない．　(終)

［定理 6.27 の証明］ 補題 6.28(2)によって，Dynkin 図式に閉じた道はなく tree であるが，枝分れしている頂点では，  の形しかないことが，補題 6.21 からわかる．○⇛○ を含めば，補題 6.28(1)によって G_2-型である．○⟹○ を含めば，補題 6.29 より，B_l, C_l または F_4-型であることがわかる．○⇛○，○⟹○ を含まないときは，補題 6.29 より，A_l, D_l または E_l- 型しかありえない．　(終)

注意 6.30　A_l, B_l, C_l, D_l はそれぞれ古典群 $SU(l+1)$，$SO(2l+1)$，$Sp(l)$，$SO(2l)$ の root 系である((4.4)〜(4.8))．残りの，E_l $(l=6, 7, 8)$，F_4，G_2 の型の root 系をもつ Lie 群は**例外(型) Lie 群**または単に**例外群**とよばれる．

dominant root と拡大 Dynkin 図式

定義　単純 Lie 群 G の各分類型(6.26)に応じて，次のように与えられる root $\tilde{\alpha}$ を **dominant root** または**最高 root** という：

(6. 31)

(A_l)　$\tilde{\alpha}=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_l=e_1-e_{l+1}$

(B_l)　$\tilde{\alpha}=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_l=e_1+e_2$

(C_l)　$\tilde{\alpha}=2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-1}+\alpha_l=2e_1$

(D_l)　$\tilde{\alpha}=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{l-2}+\alpha_{l-1}+\alpha_l=e_1+e_2$

(E_6)　$\tilde{\alpha}=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6=\dfrac{1}{2}(e_1+e_2+\cdots+e_5-e_6-e_7+e_8)$

(E_7)　$\tilde{\alpha}=2\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+4\alpha_4+3\alpha_5+2\alpha_6+\alpha_7=-e_7+e_8$

(E_8)　$\tilde{\alpha}=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+6\alpha_4+5\alpha_5+4\alpha_6+3\alpha_7+2\alpha_8=e_7+e_8$

(F_4)　$\tilde{\alpha}=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4=e_1+e_2$

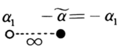
(G_2)　$\tilde{\alpha}=3\alpha_1+2\alpha_2=-e_1-e_2+2e_3$

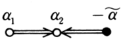
正 root の表から，次のことが確かめられる：

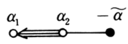
(6.32)　$\tilde{\alpha}=m_1\alpha_1+\cdots+m_l\alpha_l$ を dominant root とするとき，任意の正 root $\theta=\nu_1\alpha_1+\cdots+\nu_l\alpha_l$ について，$\nu_i\leq m_i$ $(i=1,2,\cdots,l)$ である．

定義　G の単純 root $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ に dominant root $\tilde{\alpha}$ の符号を変えた $-\tilde{\alpha}$ をつけ加えた(一次独立ではないが可容系の条件(＊)をみたす)ベクトル系から，Dynkin 図式と同様に構成した図式を**拡大 Dynkin 図式**という．

(6.33)　下の場合以外の拡大 Dynkin 図式は補題 6.29 の図(●は dominant root)で与えられる：

(A_1) 

(B_2) 

(G_2) 

定義　基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}=\{X\in L(T)\,|\,\alpha_i(X)>0\ (i=1,\cdots,l)\}$ に含まれる Weyl 胞体 $\varDelta$ のうち，$\bar{\varDelta}$ が原点を含むものを**基本 Weyl 胞体**という．

定理 6.34　(1)　G が(半)単純であるための必要十分条件は Weyl 胞体が有界な単体(の直積)の内部であることである．

(2)　G は単純とするとき，その基本 Weyl 胞体 $\varDelta$ は $\varDelta=\{X\in L(T)\,|\,\alpha_i(X)>0\ (i=1,\cdots,l),\ \tilde{\alpha}(X)<1\}$ で与えられる．

［証明］　G の Weyl 胞体 $\varDelta$ は拡大 Weyl 群の作用によって互いに合同であ

る．G が半単純でなければ有界ではない．G が半単純で $G_1, \cdots, G_k$ を単純因子にもてば，G_i の Weyl 胞体 Δ_i について，Δ は $\Delta_1\times\cdots\times\Delta_k$ と合同である．結局，(1)は(2)からえられることがわかる．(6.32)から，(2)で与えられる Δ は

$$\Delta=\{X\in L(T)\mid \text{すべての正 root}\ \alpha\ \text{について}\ 0<\alpha<1\}$$

をみたす Weyl 胞体であることがわかる．また，原点をその閉包に含む基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ 内の Weyl 胞体はこの Δ しかない． (終)

1-連結 Lie 群の基本 weight と中心

定理 6.35 G を 1-連結コンパクト Lie 群とするとき，単純 root $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ の反転 root $\alpha_1{}^*, \cdots, \alpha_l{}^*$ は自由アーベル群 $\Gamma(\cong\pi_1(T))$ の基底をなす．

［証明］ 仮定と定理 5.19 より，$\Gamma=\Gamma_0$ は反転 root $\theta_r{}^*$ で生成される階数 l の自由アーベル群であるから，任意の $\theta_r{}^*$ が $\alpha_1{}^*, \cdots, \alpha_l{}^*$ の整係数一次結合であることを示せばよい．定理 6.16(1) によって，α_i と $\varphi\in W(G)$ があって，$\varphi(\alpha_i)=\theta_r$．また，定理 6.12 によって，$W(G)$ は単純 root α に関する鏡映 φ_α で生成される．故に，$\theta_r=\varphi_\alpha(\theta_s)$ かつ $\theta_s{}^*$ は $\alpha_1{}^*, \cdots, \alpha_l{}^*$ の整係数一次結合であると仮定してよい．定理 5.6(1) より，$\varphi_\alpha(\theta_s{}^*)=\theta_s{}^*-\alpha(\theta_s{}^*)\alpha^*$．ここで，$\theta_r{}^*\in\Gamma_0=\Gamma$ であるから $\alpha(\theta_s{}^*)$ は整数である．また，$\varphi_{r,1}=\varphi_\alpha\varphi_{s,1}\varphi_\alpha$ が成り立つから，$\varphi_r{}^*=\varphi_{r,1}(0)=\varphi_\alpha\varphi_{s,1}\varphi_\alpha(0)=\varphi_\alpha\varphi_{s,1}(0)=\varphi_\alpha(\theta_s{}^*)=\theta_s{}^*-\alpha(\theta_s{}^*)\alpha^*$ は $\alpha_1{}^*, \cdots, \alpha_l{}^*$ の整係数一次結合である． (終)

定義 単純 root $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ に対して，関係式

$$2(w_i, \alpha_j)/(\alpha_j, \alpha_j)=\delta_{ij}$$

で定められる $w_1, \cdots, w_l$ を**基本 weight** という．

定理 6.36 G は 1-連結コンパクト Lie 群とするとき，基本 weight w_i は weight である．即ち，$w_i(\Gamma)\subset \boldsymbol{Z}$．(4.19)によって，$w_i\in H^1(T)=\mathrm{Hom}(\Gamma, \boldsymbol{Z})$ とみるとき，基本 weight $w_1, \cdots, w_l$ は $H^1(T)$ の $\boldsymbol{Z}$-基底をなす．

［証明］ $i\neq j$ ならば $(w_i, \alpha_j)=0$ だから，超平面 $w_i=0$ と超平面 $\alpha_j=0$ は直交する．従って，$\alpha_j{}^*$ は超平面 $w_i=0$ に含まれ，$w_i(\alpha_j{}^*)=0\ (i\neq j)$．$2(w_i, \alpha_i)=(\alpha_i, \alpha_i)\Longrightarrow\beta=2w_i-\alpha_i$ について $(\beta, \alpha_i)=0$．上と同様に，$\beta(\alpha_i{}^*)=0$ だから，$2w_i(\alpha_i{}^*)=\beta(\alpha_i{}^*)+\alpha_i(\alpha_i{}^*)=2$．結局，$w_i(\alpha_j{}^*)=\delta_{ij}$．定理 6.35 によって，これは $\{w_i\}$ が $\mathrm{Hom}(\Gamma, \boldsymbol{Z})$ の $\boldsymbol{Z}$-基底であることを示す． (終)

単純な計算によって，次のことが確かめられる.

(6.37)　1-連結コンパクト単純 Lie 群の基本 weight $\{w_i\}$ は次の様に与えられ，それらは単純 root $\{\alpha_i\}$ の有理数係数一次結合である.

(A_l)　$w_i=\sum_{j=1}^{i}e_j-\dfrac{i}{l+1}\sum_{k=1}^{l+1}e_k$

(B_l)　$w_i=\sum_{j=1}^{i}e_j\ (1\leq i<l),\quad w_l=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}e_j$

(C_l)　$w_i=\sum_{j=1}^{i}e_j$

(D_l)　$w_i=\sum_{j=1}^{i}e_j\ (1\leq i<l-1),\quad w_{l-1}=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{l-1}e_j-\dfrac{1}{2}e_l,\ w_l=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}e_j$

(E_6)　$w_1=\dfrac{2}{3}(e_8-e_7-e_6),\quad w_2=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{5}e_j+\dfrac{1}{2}(e_8-e_7-e_6),$

$$w_3=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{5}e_j+\frac{5}{6}(e_8-e_7-e_6),$$

$$w_i=\sum_{j=i-1}^{5}e_j+\frac{7-i}{3}(e_8-e_7-e_6)\quad (i=4,5,6),\quad (w_2=\tilde{\alpha})$$

(E_7)　$w_1=e_8-e_7,\quad w_2=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{6}e_j+(e_8-e_7),\ w_3=-\dfrac{1}{2}e_1+\dfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{6}e_j+\dfrac{3}{2}(e_8-e_7),$

$$w_i=\sum_{j=i-1}^{6}e_j+\frac{8-i}{2}(e_8-e_7)\quad (i=4,5,6,7),\quad (w_1=\tilde{\alpha})$$

(E_8)　$w_1=2e_8,\quad w_2=\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{7}e_j+\dfrac{5}{2}e_8,\quad w_3=-\dfrac{1}{2}e_1+\dfrac{1}{2}\sum_{j=2}^{7}e_j+\dfrac{7}{2}e_8,$

$$w_i=\sum_{j=i-1}^{7}e_j+(9-i)e_8\quad (i=4,5,6,7,8),\quad (w_8=\tilde{\alpha})$$

(F_4)　$w_1=e_1+e_2=\tilde{\alpha},\ w_2=2e_1+e_2+e_3,\quad w_3=\dfrac{1}{2}(3e_1+e_2+e_3+e_4),\quad w_4=e_1$

(G_2)　$w_1=-e_2+e_3=2\alpha_1+\alpha_2,\quad w_2=-e_1-e_2+2e_3=3\alpha_1+2\alpha_2=\tilde{\alpha}$

定理 6.38　G を 1-連結コンパクト Lie 群，A を単純 root $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ で生成される $H^1(T)=\boldsymbol{Z}\cdot w_1+\cdots+\boldsymbol{Z}\cdot w_l$ の部分群とするとき，G の中心は $Z(G)\cong H^1(T)/A$ で与えられる．特に，G が例外群のときは次のようになる：

$$Z(E_6)\cong\boldsymbol{Z}_3,\quad Z(E_7)\cong\boldsymbol{Z}_2,\quad Z(E_8)=Z(F_4)=Z(G_2)=0$$

［証明］　定理 4.18(2) と定理 6.10 によって，$\exp: L(T)\to T$ について，

$$\begin{aligned}\exp^{-1}(Z(G))&=\{X\in L(T)\mid \theta_r(X)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1),\quad r=1,2,\cdots,m\}\\&=\{X\in L(T)\mid \alpha_i(X)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1),\quad i=1,2,\cdots,l\}\end{aligned}$$

従って，$\tilde{\Gamma}=\exp^{-1}(Z(G))$ とおけば，同型 $\mathrm{Hom}(\tilde{\Gamma},Z)\cong A$ がえられ，射入

$i:\Gamma=\Gamma_0=\exp^{-1}(e)\to\tilde{\Gamma}$ で誘導される $i^\#:\mathrm{Hom}(\tilde{\Gamma},\boldsymbol{Z})\to\mathrm{Hom}(\Gamma,\boldsymbol{Z})$ は射入 $A\hookrightarrow H^1(T)$ と同値である．$Z(G)\cong\tilde{\Gamma}/\Gamma$ は有限であるから，完全系列 $0\to\Gamma\to\tilde{\Gamma}\to Z(G)\to 0$ より，完全系列

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(\tilde{\Gamma},\boldsymbol{Z})\xrightarrow{i^\#}\mathrm{Hom}(\Gamma,\boldsymbol{Z})\longrightarrow\mathrm{Ext}(Z(G),\boldsymbol{Z})\longrightarrow 0$$

が誘導され，$H^1(T)/A\cong\mathrm{Coker}\,i^\#\cong\mathrm{Ext}(Z(G),\boldsymbol{Z})\cong Z(G)$．後半は (6.37) と (6.26) によって，α_i を w_j の一次結合で書いて確かめられる．　(終)

§7　最大階数部分群

最大階数部分群と直積

定義　コンパクト連結 Lie 群 G の閉部分群 $G'(G'\subsetneqq G)$ は，$\mathrm{rank}\,G=\mathrm{rank}\,G'$ のとき G の**最大階数部分群**であるといわれる．

この節の目的は，与えられたコンパクト連結 Lie 群 G に含まれる最大階数部分群 G' にどのようなものがあるかを調べることである．G' は G の自己同型で他の部分群に変りうるから，G' がどのように G に入るかは問題にしない．

極大トーラスの共役性から，次は明らかであろう．

(7.1)　G' を G の最大階数部分群とし，T を G の極大トーラスとするとき，G' をその共役類の中でとりかえて，T が G' の極大トーラスであるようにできる：

$$T\subset G'\subset G$$

また，G の有限度数の被覆群 $\tilde{G}$ は G' の逆像を最大階数部分群として含み，G' の局所同型類(＝Lie 環の同型類)にのみ注目すれば，G を適当な $\tilde{G}$ でおきかえてよいことがわかる．特に，$\tilde{G}$ はトーラスといくつかの 1-連結単純群の直積にとれる(系 5.31)から，次の定理によって，1-連結単純群について調べれば十分であることがわかる．

定理 7.2　コンパクト連結 Lie 群 G_i の直積 $G_1\times\cdots\times G_k$ の最大階数部分群 G' は $G_1'\times\cdots\times G_k'$ に同型である．ただし，G_i' は G_i の最大階数部分群または G_i である．

［証明］　$k=2$ としてよい．また，(7.1)のようにして，G_i の極大トーラス T_i について，$T_1\times T_2\subset G'$ としてよい．$G_i'=\{a_i\mid(a_1,a_2)\in G'\}$ は T_i を含む

G_i の部分群である$(i=1,2)$．$a=(a_1,a_2)\in G'$ に対して，$b=(b_1,b_2)\in G'$ が存在して，$bab^{-1}\in T_1\times T_2$ となる(定理 3.15)．G_2 の単位元 e_2 について，$t=(b_1a_1b_1^{-1},e_2)\in T_1\times 1$ とおくと，$(a_1,e_2)=b^{-1}tb\in G'$，即ち $G_1'\times 1\subset G'$．同様に，$1\times G_2'\subset G'$．明らかに，$G'\subset G_1'\times G_2'$ であるから，$G'=G_1'\times G_2'$．　(終)

最大階数部分群の root

以後，この§では G はコンパクト連結 Lie 群，G' はその最大階数部分群，T は G' に含まれる G の極大トーラスとする．G と G' の root は，この共通の極大トーラス T に関して考える．

定理 7.3　G' の root は G の root である．

［証明］ G' の root に対応する $Ad|T$ の不変部分空間 V_j' によって，$L(G')=L(T)\oplus\sum_{j=1}^{m'}V_j'$ と直交分解される．一方，$L(G)$ における $L(G')$ の直交補空間 $L(G')^\perp$ は $Ad|T$ で不変で，直交分解 $L(G)=L(T)\oplus\sum_{i=1}^{m}V_i$ は $V_j'=V_j$ $(j\leq m')$ に選べる．従って，G' の root は G の root の一部である．　(終)

G の $L(G)$ への随伴作用 Ad の G' への制限は $L(G')$ で，従って $L(G')^\perp$ で閉じている．$\pi:G\to G/G'$ を射影，$\bar{e}=\pi(e)$，とするとき，π の微分 $d\pi$ は同型 $L(G')^\perp\cong T_{\bar{e}}(G/G')\cong \boldsymbol{R}^{2m-2m'}$ $(\dim G=l+2m,\ \dim G'=l+2m')$ を与え，$Ad|G'$ は準同型

$$h: G'\longrightarrow O(2m-2m')$$

を定義する．

補題 7.4　G が単純ならば，$Z(G)=\mathrm{Ker}\,h$ である．

［証明］ $Z(G)$ は任意の極大トーラスに含まれるから，$Z(G)\subset T\subset G'$．Ad は $Z(G)$ では自明であるから，$Z(G)\subset\mathrm{Ker}\,h$.

$a\in G'$ について，L_a と A_a は同じ写像 $G/G'\longrightarrow G/G'$ を誘導し，$dL_a:T_{\bar{e}}(G/G')\longrightarrow T_{\bar{e}}(G/G')$ は $Ad|L(G)^\perp$ と同値である．故に，$\mathrm{Ker}\,h=\{a\in G'\mid dL_a=1\}=\{a\in G'\mid a\cdot\exp tX\in\exp tX\cdot G',\ \forall X\in L(G)\}=\{a\in G'\mid ag\in gG',\ \forall g\in G\}=\{a\in G'\mid g^{-1}ag\in G',\ \forall g\in G\}$．従って，$a\in\mathrm{Ker}\,h\Longrightarrow g^{-1}ag\in\mathrm{Ker}\,h$ $(\forall g)$．即ち，$\mathrm{Ker}\,h$ は G の正規かつ閉な部分群である．G は単純 $\Longrightarrow\dim\mathrm{Ker}\,h=0\Longrightarrow\mathrm{Ker}\,h$ は離散群 $\Longrightarrow\mathrm{Ker}\,h\subset Z(G)$ (第1章定理 1.12(3))．故に，$Z(G)=\mathrm{Ker}\,h$ である．　(終)

定義　G の Stiefel 図式 $D(G)=\bigcup_{r=1}^{m}\theta_r{}^{-1}(\boldsymbol{Z})$ において，

$D(G)$ の**中心**$=\exp^{-1}Z(G)=\{X\in L(T)\,|\,\theta_r{}^{-1}(X)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 1),\ \ r=1,\cdots,m\}$

最大階数部分群 G' の root を G の root の前半 $\pm\theta_1,\cdots,\pm\theta_{m'}$ に選ぶとき，

$D(G)-D(G')=\bigcup_{r=m'+1}^{m}\theta_r{}^{-1}(\boldsymbol{Z})$

$(D(G)-D(G')$ の**中心**$)=\{X\in L(T)\,|\,\theta_r(X)\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 1),\ \ r=m'+1,\cdots,m\}$

とおく．

定理 7.5　G が単純ならば，$(D(G)-D(G')$ の中心$)=(D(G)$ の中心$)$.

［証明］　X が $D(G)-D(G')$ の中心の元であれば，$\exp X$ は $L(G')^{\perp}=\sum_{i=m'+1}^{m}V_i$ に自明に作用するから，$\mathrm{Ker}\,h$ の元である．逆に，$\exp X\in\mathrm{Ker}\,h$ ならば X は $D(G)-D(G')$ の中心に入るから，$D(G)-D(G')=\exp^{-1}(\mathrm{Ker}\,h)$. 従って，定理は補題 7.4 から直ちにえられる．　　(終)

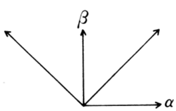
系 7.6　　$\dim G'\leq\dim G-2\,\mathrm{rank}\,G$　　$(G$：単純$)$

［証明］　$D(G)-D(G')$ の中心は 0 次元$\Longrightarrow m-m'\geq l$.　　(終)

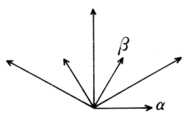
補題 7.7　α,β を G' の root とする．$\alpha+\beta$ が G の root であれば $\alpha+\beta$ は G' の root でもある．

［証明］　$\beta=\pm\alpha$ ならば $\alpha+\beta$ は root ではないから，$\mathrm{rank}\,G\geq 2$ である．

まず $\mathrm{rank}\,G=2$ の場合を考える．補題のような G の型は $A_2, B_2=C_2, G_2$ しかない．A_2-型のときは，補題の α,β は 60° または 120° の角をなし，$\alpha-\beta$ または $\alpha+\beta$ は G' の root でなければならない．これは $G'=G$ を示し矛盾であるから補題のような場合は起こらない．B_2, G_2 の場合に，補題に反するような α,β の可能性は下の図のようなものしかない：



$(G=B_2,\ \ G'=A_1\times A_1)$



$(G=G_2,\ \ G'=A_2)$

左上の図において，$\alpha=x_1,\ \ \beta=x_2$ に座標をとれば，

$$D(G)\ \text{の中心}=\{(n_1,n_2)\,|\,n_1,n_2\in\boldsymbol{Z}\}$$

$D(G)-D(G')$ は超平面 $x_1\pm x_2\equiv 0\ \ (\mathrm{mod}\ 1)$ で与えられるから，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ はその中心に属し，$D(G)$ の中心にはない．従って，定理 7.5 からこの場合は起こらない．

前ページ右の図でも，$\alpha=x_1$，$\beta=x_2$ に座標をとれば，$D(G)$ は超平面

$$x_1\equiv 0,\qquad x_2\equiv 0,\quad x_1-x_2\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$
$$x_1+x_2\equiv 0,\quad x_1-2x_2\equiv 0,\quad 2x_1-x_2\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\ 1)$$

で与えられ，下の3つの式は $D(G)-D(G')$ の超平面を与える．従って，$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ は $D(G)-D(G')$ の中心にあるが，$D(G)$ の中心にはなく，この場合も起こらないことがわかる．結局，補題は rank $G=2$ のときは正しい．

次に，rank $G>2$ とする．U を $\alpha=0$, $\beta=0$ で与えられる $L(T)$ の部分空間とし，H を $\exp U$ の G における中心化群とする．$D(H)$ は U に平行な $D(G)$ のすべての超平面から成り，H の root は α,β で張られる2次元平面 V に含まれる G の root 全体から成ることがわかる．H は局所的には（U を被覆群にもつ）$l-2$ 次元トーラスと，H と同じ root をもつ階数2の半単純群 H_2 との直積である．同様に G' についても，V に含まれる G' の root は $H_2'=H_2\cap G'$ の root と同一視できる．従って，階数2の場合の結果から，$\alpha+\beta$ は H_2' の root で，従って G' の root となり，補題をうる．　（終）

最大階数部分群の存在条件

まず，次の補題を用意する．

補題 7.8　G の root $\theta,\theta_1,\cdots,\theta_k$ が次の条件をみたすとする：

(1)　$\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ は一次独立，$\theta\neq\pm\theta_j$ $(1\leq j\leq k)$.

(2)　正数 a_i があって，$\theta=a_1\theta_1+\cdots+a_p\theta_p-a_{p+1}\theta_{p+1}-\cdots-a_k\theta_k$.

このとき，少くとも1つの添数 j が存在して，$j\leq p$ のときは $\theta-\theta_j$ が，$j>p$ のときは $\theta+\theta_j$ が G の root になる．

［証明］　補題の主張する j が存在しないと仮定する．$1\leq i\leq p$ のとき，$\theta-\theta_i$ は root ではないから，定理 6.5 と定理 6.3(2)によって，$2(\theta,\theta_i)/(\theta_i,\theta_i)\leq 0\Longrightarrow(\theta,\theta_i)\leq 0$．同様に，$p<i\leq k$ のとき，$\theta+\theta_i$ は root でないことから，$(\theta,\theta_i)\geq 0$．従って，$(\theta,\theta)=\sum_{i\leq p}a_i(\theta,\theta_i)-\sum_{i>p}a_i(\theta,\theta_i)\leq 0\Longrightarrow\theta=0\Longrightarrow\theta$ は root でない．これは矛盾である．　（終）

系 7.9　補題 7.8 において，$a_1,\cdots,a_k$ が整数であれば，$\theta_1,\cdots,\theta_k$ の中の1つの θ_i より始まる root の有限列 θ_i, $\theta_i\pm\theta_j$, $\cdots$, $\pm\theta$ によって $\pm\theta$ に到達する．ただし，q 番目のものは $q-1$ 番目のものから，root $\pm\theta_1,\cdots,\pm\theta_k$ の中の1つ

を加えることによってえられるものとする．

［証明］ $\sum|a_i|$ に関する帰納法を補題 7.8 に使えばよい． （終）

定理 7.10 $\pm\theta_1, \cdots, \pm\theta_m$ を G の root 全体とするとき， $\pm\theta_1, \cdots, \pm\theta_{m'}$ が G の最大階数部分群 G' の root 全体であるためには，次の 2 条件が必要十分である：

(1) $\theta_1, \cdots, \theta_{m'}$ において，一次独立なものの最大数を k とするとき，これらはその中の k 個の root の整係数一次結合で表わされる．

(2) $\theta_1, \cdots, \theta_{m'}$ の整係数一次結合である G の root は G' の root である．

［証明］ （必要性） G' の基本 Weyl 領域を 1 つ定めて，単純 root $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ をとれば(1)は明らかである（定理 6.10）．また(2)において，$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ の整係数一次結合が G の root であるとき，それが G' の root であることをいえばよい．これには，系 7.9 の列に補題 7.7 を適用して，この列の各 root が G' の root であることがわかるから，(2)がえられる．

（十分性） (1), (2)を仮定し，(1)の k 個の root を $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ とする．

$$C=\{z\in L(T) \mid \theta_i(z)\equiv 0 \pmod 1\ ;\ i=1, \cdots, m'\}$$
$$=\{z\in L(T) \mid \alpha_i(z)\equiv 0 \pmod 1\ ;\ i=1, \cdots, k\}$$

を考え，G' を $\exp(C)$ の中心化群の連結成分とする．θ_i $(1\leq i\leq m')$ に対応する不変部分空間 V_i は $L(G')$ に含まれるから，$\pm\theta_i$ は G' の root である．

$m'<j\leq m$ とするとき，C が $\theta_j^{-1}(\boldsymbol{Z})$ に含まれないことをいえば，θ_j は G の root でないことがわかる．θ_j は $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ の整係数一次結合ではないから，次の二つの場合に分かれる：

(a) $\theta_j=a_1\alpha_1+\cdots+a_k\alpha_k$ で，係数の 1 つ例えば a_1 は整数ではない．

このとき，$\theta_1(z)=1$, $\theta_2(z)=\cdots=\theta_k(z)=0$ で与えられる点 z について $\theta_j(z)$ は整数でないから，$z\notin\theta_j^{-1}(\boldsymbol{Z})\Longrightarrow C\not\subset\theta_j^{-1}(\boldsymbol{Z})$.

(b) θ_j は $\alpha_1, \cdots, \alpha_k$ に独立である．

このとき，$l=\mathrm{rank}\, G>k$, $\bigcap_{i=1}^{k}\alpha_i^{-1}(0)(\subset C)$ は $l-k$ 次元で，その十分 $\mathbf{0}$ に近い点で $\theta_j^{-1}(\boldsymbol{Z})$ に属さないものがあるから，$C\not\subset\theta_j^{-1}(\boldsymbol{Z})$. （終）

定理 7.11 G' を G の最大階数部分群で連結なもの，Z' を G' の中心とする．このとき，G' は Z' の G における正規化群の連結成分である．

［証明］ 定理 7.10 の証明において，$Z'=\exp(C)$ は G' の中心であり，G' は

G における Z' の中心化群の連結成分であることがわかる．Z' の G における正規化群の連結成分 $N(Z')_0$ を考える．$x\in N(Z')_0$ について，$A_x : Z'\to Z'$ を考える．x と単位元を結ぶ道を考えると，$A_x\simeq 1 : Z'\to Z'$．よって，A_x は Z' の各成分を保ち，各成分は 1 点またはトーラスで，補題 3.11 を使って，$A_x=1$ であることがわかる．従って，$N(Z')_0$ は Z' の中心化群の連結成分と一致する．（終）

系 7.12　連結な最大階数部分群の中で極大なものは，ある元の正規化群（＝中心化群）の連結成分である．

［証明］　連結な最大階数部分群 G' の中心 Z' は G の中心 $Z(G)$ を含むが，$G\neq G'$ であるから一致しない．$z\in Z'-Z(G)$ について，$G'\subset N(z)\subsetneqq G$．$G'$ が極大ならば，$G'=N(z)_0$ である．（終）

G の中心以外の元の正規化群が必ずしも極大でないことは後に示される．

極大な最大階数部分群

最大階数部分群（の型）を調べることは，G が単純群の場合に帰着されることは既に述べた．また，極大な最大階数部分群がわかれば，有限回の操作（系 7.12 参照）で最大階数部分群の型が判明する．以下 G は単純群として，その極大な最大階数部分群を調べることにする．

単純群 G の基本 Weyl 胞体の閉包を $S(G)$ とするとき，$S(G)$ は 単純 root $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ と dominant root $\tilde{\alpha}$ によって，

$$S(G)=\{X\in L(T) \mid \alpha_1(X)\geq 0, \cdots, \alpha_l(X)\geq 0,\ \tilde{\alpha}(X)\leq 1\}$$

で与えられる l 次元単体である．G の任意の点は内部自己同型によって T の点 $x=\exp X$，$X\in L(T)$，に写され，X は拡大 Weyl 群の元によって，$S(G)$ の点へ写される．従って，G の任意の点は内部自己同型で $z=\exp Z$，$Z\in S(G)$，へ写される．故に，系 7.12 によって，極大な最大階数部分群を調べるには，このような z の正規化群のみを考えればよいことがわかる．

補題 7.13　$x=\exp X$，$X\in S(G)$，について，x の正規化群の連結成分 G' が極大な連結最大階数部分群であれば，X は次の 2 つの場合である：

(1)　$S(G)$ の頂点

(2)　$D(G)$ の中心に属する 2 頂点を両端とする稜の内点

ここで，(2)の場合 G' は内点のとり方に無関係であり，また(2)で1頂点が原点である場合のものに共役である．

［証明］ X が $S(G)$ の内点のときは，$N(x)=T$ で，$l>1$ のときは極大ではない．X が $S(G)$ の2次元以上の面の内点であれば，この面の境界の稜の内点の exp による像の正規化群は $N(x)$ より大である(定理 4.15)．X が $S(G)$ の稜の内点のとき，この稜の端点 X' が $D(G)$ の中心でなければ，$N(x')\neq G$，$x'=\exp X'$，は $N(x)$ より大である．結局(1)，(2)の場合が残る．

(2)の場合を考え，Y を $D(G)$ の中心に属する1端点，$y=\exp Y$ とする．$y\in Z(G)\Longrightarrow N(y^{-1}x)=N(x)$．$y^{-1}x=\exp(X-Y)$，かつ $X-Y$ は原点を含む Weyl 胞体の閉包 S' の原点から出る稜の内点である．S' を $S(G)$ に写す Weyl 群の作用を考えれば，$N(y^{-1}x)\cong N(x')$，$x'=\exp X'$，となる原点から出る $S(G)$ の稜の内点 X' がある．

最後に内点のとり方に無関係なことは，定理 4.15 の証明のようにしてえられる．なお，次の系も同時にえられる．　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

系 7.14　補題 7.13(2) の場合で1頂点が原点であれば，その稜を含む直線から exp でえられる1助変数部分群(1次元トーラス) S について，$G'=Z(S)_0$ である．

dominant root $\tilde{\alpha}$ を単純 root $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ の整係数一次結合

$$\tilde{\alpha}=m_1\alpha_1+\cdots+m_l\alpha_l \quad (m_i：正整数)$$

で表わす．$S(G)$ の原点を $\mathbf{0}$，他の頂点 X_i を

$$\alpha_j(X_i)=0 \quad (j\neq i), \quad \tilde{\alpha}(X_i)=1$$

で定義し，$x_i=\exp X_i\in T\subset G$ とおくとき，次の定理が成り立つ．

定理 7.15　G はコンパクト連結単純 Lie 群とする．

(1)　x_i の正規化群が極大であるための必要十分条件は $m_i=$素数 (>1)．

(2)　$\exp(X_i/2)$ の正規化群が極大であるための必要十分条件は $m_i=1$．

これによって，G の極大な最大階数部分群の型はすべて求められる．

［証明］ (1) (必要性) 整数 $a,b>1$ によって，$m_i=ab$ と分解されたとする．$D(N(x_i))$ は $D(G)$ の平行な超平面の系で X_i を含むようなもの全体から成る．従って，$N(x_i)$ の root は $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ の一次結合でその α_i の係数として $0,\pm m_i$

をもつ root 全体から成っている．$y_i=\exp(aX_i)$ とおくと，同様にして，$N(y_i)$ の root は α_i の係数が b の整数倍であるようなものから成る．系 7.9 によって，$N(y_i)$ の root で b を係数にもつものがあるから，$N(y_i)\neq N(x_i)$．$N(y_i)=N(x_i{}^a)\supset N(x_i)$ であるから $N(x_i)$ は極大ではない．故に，$N(x_i)$ が極大 $\Longrightarrow m_i$ は素数または 1．$m_i=1$ ならば x_i は G の中心に入るから $N(x_i)=G$．従って m_i は素数である．

(十分性) $N(x_i)\subset N(y)\subsetneqq G$，$y=\exp Y$，のとき $N(x_i)=N(y)$ を示せばよい．$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_l,\ \tilde{\alpha}$ は $N(x_i)$ と $N(y)$ の root である．y は $N(y)$ の中心に入っているから，$\alpha_j(Y)$ $(j\neq i)$ と $\tilde{\alpha}(Y)$ は整数．y は G の中心にはないから，$\alpha_i(Y)=q/m_i$，$q\not\equiv 0 \pmod{m_i}$ となる整数 q がある．Z を $\alpha_j(Z)=\alpha_j(Y)$ $(j\neq i)$，$\alpha_i(Z)=0$ で与えられる点，$z=\exp Z$ とすると，z は G の中心の元であり，$y=x_i{}^q z$ をみたす．

m_i は素数であるから，$qr\equiv 1 \pmod{m_i}$ となる整数 r が存在し，$y^r=x_i z'$，$z'\in Z(G)$ となる．よって，$N(y)\subset N(y^r)=N(x_i z')=N(x_i)$．従って，$N(x_i)=N(y)$ となる．

(2)　(必要性) は補題 7.13 よりえられる．

(十分性) $Y=X_i/2$ は稜 $\mathbf{0}X_i$ の中点である．$y=\exp Y$ とおくと，$D(N(y))$ は $\mathbf{0}X_i$ に平行なすべての $D(G)$ の超平面からなる．もし，N' が $N(y)$ より大きい部分群であれば，$D(N')$ は $\mathbf{0}X_i$ に平行でない超平面を少くとも 1 つ含むから，これに対応する root を $\tilde{\alpha}'=n_1\alpha_1+\cdots+n_l\alpha_l$ とすると $n_i\neq 0$ でなければならない．$\tilde{\alpha}$ は dominant root で，$m_i=1$ だから，$n_i=\pm m_i=\pm 1$．従って，$\alpha_1\equiv\cdots\equiv\alpha_{i-1}\equiv\alpha_{i+1}\equiv\cdots\equiv\alpha_l\equiv\tilde{\alpha}'\equiv 0$ と $\alpha_1\equiv\cdots\equiv\alpha_l\equiv 0$ とは同値で，N' の中心は G の中心に含まれ，$N'=G$ となる．即ち，$N(y)$ は極大である．　(終)

定理 7.16　定理 7.15 の極大な最大階数部分群の Dynkin 図式は G の Dynkin 図式から次のように求められる：

(1)　$m_i=$ 素数のとき，$G_l=N(x_i)$ の Dynkin 図式は G の Dynkin 図式に $-\tilde{\alpha}$ をつけ加えた拡大 Dynkin 図式から，α_i を取り去ってえられる．

(2)　$m_i=1$ のとき，$N(\exp(X_i/2))$ は局所的に 1 次元トーラス T と階数 $l-1$ の半単純群 G_{l-1} の直積で，G_{l-1} の Dynkin 図式は G の Dynkin 図式から α_i を取り去ってえられる．

［証明］(1)　$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_l, -\tilde{\alpha}$ は $N(x_i)$ の root である．$N(x_i)$ の root の α_i の係数は m_i の倍数であることから，これらを $N(x_i)$ の単純 root にとれることがわかる(定理 6.10 参照)．

(2)　$N(\exp(X_i/2))$ の Stiefel 図式の超平面は $\mathbf{0}X_i$ に平行なものから成り，$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_l$ の一次結合で書ける root に対応する．これらは G_{l-1} の単純 root 系を与える．　(終)

(6.26)のように単純 root に番号をつけるとき，dominant root は (6.31) で与えられるから，次の結果がえられる．

(7.17)　単純群 G の dominant root の各係数 m_i に対応してえられる極大な最大階数部分群 G' の型は次表のように与えられる：

G	A_l	B_l			C_l	
i	$1<i<l$	$i=1$	$1<i<l$	$i=l$	$1\leq i<l$	$i=l$
m_i	1	1	2	2	2	1
G'	$A_{i-1}\times A_{l-i}\times T$	$B_{l-1}\times T$	$B_{i-1}\times D_{l-i+1}$	D_l	$C_{i-1}\times C_{l-i+1}$	$A_{l-1}\times T$

G	D_l			E_6			E_7			
i	$i=1$	$1<i<l-1$	$i=l-1, l$	$i=1, 6$	$i=2, 3, 5$	$i=4$	$i=1, 6$	$i=2$	$i=3, 5$	$i=7$
m_i	1	2	1	1	2	3	2	2	3	1
G'	$D_{l-1}\times T$	$D_{i-1}\times D_{l-i+1}$	$A_{l-1}\times T$	$D_5\times T$	$A_1\times A_5$	$A_2\times A_2\times A_2$	$D_6\times A_1$	A_7	$A_2\times A_5$	$E_6\times T$

G	E_8					F_4			G_2	
i	$i=1$	$i=2$	$i=5$	$i=7$	$i=8$	$i=1$	$i=2$	$i=4$	$i=1$	$i=2$
m_i	2	3	5	3	2	2	3	2	3	2
G'	D_8	A_8	$A_4\times A_4$	$E_6\times A_2$	$E_7\times A_1$	$C_3\times A_1$	$A_2\times A_2$	B_4	A_2	$A_1\times A_1$

注意 7.18　$m_i=1, 2$ の場合 G/G' は対称空間である．ここでえられる例外型の対称空間は，次のような E. Cartan の記号で表わされる：

$EII=E_6/(A_1\times A_5)$, $EIII=E_6/(D_5\times T)$, $EV=E_7/A_7$,
$EVI=E_7/(D_6\times A_1)$, $EVII=E_7/(E_6\times T)$, $EVIII=E_8/D_8$,
$EIX=E_8/(E_7\times A_1)$, $FI=F_4/(C_3\times A_1)$, $FII=F_4/B_4$,
$G=G_2/(A_1\times A_1)$

この外の例外型(既約)対称空間に次の 2 つがある：

$EI=E_6/C_4$, $EIV=E_6/F_4$

注意 7.19 G が例外群の場合，これを 1-連結にとれば，G' は以下のようになる：

$(SU(2)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_2\subset E_6$, $(\mathrm{Spin}(10)\times T)/\boldsymbol{Z}_4\subset E_6$, $SU(8)/\boldsymbol{Z}_2\subset E_7$,
$(\mathrm{Spin}(12)\times SU(2))/\boldsymbol{Z}_2\subset E_7$, $(E_6\times T)/\boldsymbol{Z}_3\subset E_7$, $Ss(16)\subset E_8$,
$(E_7\times SU(2))/\boldsymbol{Z}_2\subset E_8$, $(Sp(3)\times Sp(1))/\boldsymbol{Z}_2\subset F_4$, $\mathrm{Spin}(9)\subset F_4$,
$SO(4)\subset G_2$

ここで，$(H_1\times H_2)/\boldsymbol{Z}_n$ の形のときは，$\boldsymbol{Z}_n$ の生成元は H_1 と H_2 の中心の生成元の積の形である．特に，Spin(12) をその生成元で割ると $Ss(12)$ となる．

また，$m_i=3, 5$ のときにも，各因子にまたがる中心的元で割って，G' は

$(SU(3)\times SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3\subset E_6$, $(SU(3)\times SU(6))/\boldsymbol{Z}_3\subset E_7$,
$SU(9)/\boldsymbol{Z}_3\subset E_8$, $(E_6\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3\subset E_8$,
$(SU(3)\times SU(3))/\boldsymbol{Z}_3\subset F_4$, $SU(3)\subset G_2$,
$(SU(5)\times SU(5))/\boldsymbol{Z}_5\subset E_8$

さらに，EI において，$C_4=PSp(4)=Sp(4)/\boldsymbol{Z}_2$ である．

第6章　Bott–Morse の理論

この章では Bott-Morse 理論を展開し，それを主として例外 Lie 群の位相に応用する．§1において古典的ないわゆる Morse の理論，Morse の不等式を紹介した後，Riemann 空間における道の空間の Poincaré 級数が測地線の指数で表わされることを説明する．その後，§2で Bott-Morse の理論で重要な概念である K-横断的測地線とその指数および変分完備性を導入する．対称空間およびその他の空間についての変分完備性は§3で確かめる．§4はコンパクト Lie 群 G への応用であり，G の閉道空間と等質空間のホモロジーを測地線分の指数で表わす．さらに具体的に，§5において例外 Lie 群の階数と有理型を決定する．§6は次節の準備であるが，ここでは，K-サイクルの概念を導入，それを Bott-Morse の理論と関係づけ，その後，各 root について G の中の3次元部分群を指定する．特に例外群 $G=E_l$ $(l=6,7,8)$ については任意の root に対して，この3次元部分群 S^3 が $\pi_3(G)$ の生成元を表わしていることを示す．§7では，以上の理論を例外群 G の閉道空間のコホモロジーおよび G のホモトピー群の計算に応用する．

§1　測地線と Morse 理論

測地線

この章では，多様体 M は連結かつパラコンパクトな Riemann 多様体であるとする．

多様体 M における曲線

$$h : \boldsymbol{R}\ (\text{または閉区間}\ [a, b]) \longrightarrow M$$

は C^∞-写像であるとし，その微分

$$dh : T\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\longrightarrow TM$$

を考える．

記号 $\dot{h}(t)=\partial_t h(t)=(h(t)$ における h の接ベクトル $\in T_{h(t)}M)$
$=dh(t,1)$ $((t,1)\in T\boldsymbol{R}$ は $t\in\boldsymbol{R}$ における標準接ベクトル$)$

Riemann 多様体 M 上の曲線 $h:[a,b]\to$M の長さは $\int_a^b|\dot{h}(t)|dt$ で定義される．2点 $x,y\in M$ を結ぶ曲線の長さの下限として x,y の距離 $\rho(x,y)$ が定義されて，M は距離空間となる．

Riemann 多様体 M における**測地線**

$$h:(a,b)\ (\subset\boldsymbol{R})\longrightarrow M$$

は，局所的には（最短）距離を長さにもつ曲線で h の弧長は変数 t に比例するものとして定義することができる．微分幾何学の用語を用いると，測地線は次の様に定義される．

定義 $h:(a,b)\to M$ は**測地線** $(-\infty\leq a<b\leq\infty)$
$\Longleftrightarrow$ h が局所座標で $h(t)=(x^1(t),\cdots,x^m(t))$ と表わされているとき，

$$\frac{d^2}{dt^2}x^i(t)+\sum_{j,k}\begin{Bmatrix} i \\ j\ k\end{Bmatrix}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt}=0\quad(\forall t\in(a,b),\ i=1,\cdots,m)$$

ただし，$\begin{Bmatrix} i \\ j\ k\end{Bmatrix}$ は Christoffel の記号で，Riemann 計量 $g=(g_{ij})$ の逆行列を (g^{li}) とするとき，$\begin{Bmatrix} i \\ j\ k\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_l g^{li}(\partial_j g_{lk}+\partial_k g_{jl}-\partial_l g_{jk})$.

(1.1) 測地線 $g:(a,b)\to M$ において，$c,c+t\in(a,b)$ ならば，測地線分 $g|[c,c+t]$ の長さは t に比例する．

M の点 x について，測地線 $g:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ は初期条件

$$g(0)=x,\quad \dot{g}(0)=X\in T_xM$$

を与えると，上の2階常微分方程式の解として，x のある近傍で一意的に解ける．この解曲線としての測地線がつねに $\boldsymbol{R}$ 全体まで拡がるとき Riemann 多様体 M は**完備**であるという．実はこの完備性は距離空間としての M の完備性と同値であることがわかる．特にコンパクトな M やユークリッド空間は完備である．以後，M は完備であるとする．このようにしてえられる測地線 $g:\boldsymbol{R}\to M$ を，$g(t)=\exp_x(tX)$ と表わすとき，

$$\exp_x : T_xM\longrightarrow M$$

が定まる．これを**指数写像**という．また $g(0)=x$ を g の**始点**という．

$$\mathrm{Exp}: TM \longrightarrow M\times M \Longleftrightarrow \mathrm{Exp}(X)=(p(X), \exp_x X),\quad X\in T_xM$$

を考えると，$d(\exp_x)=1: T_xM\to T_xM$ であることから，Exp は T_xM の 0 ベクトル $\mathbf{0}_x$ の TM における近傍から (x, x) の近傍への同相であることがわかる．さらに，次がえられる：

(1.2)　M の任意の点に対し，$\varepsilon>0$ があって，その点の ε-近傍 U において，U の 2 点を結ぶ測地線(分)がつねに存在し，U の中では一意的である．

Riemann 多様体における曲線 h に沿った平行移動の概念を用いると，測地線 g はそれに沿った平行移動によって接ベクトルが接ベクトルへ写されるものと規定することができる．

測地線を一般の Riemann 多様体で議論するには，微分幾何学の諸概念が必要である．しかし，我々は Lie 群や等質空間を対象にしており，幸いにしてこれらの場合は，§2 で示すように 1 助変数部分群を使って測地線を与えることができるので，応用ではこれをもとにし，微分幾何学の深い領域には立ち入らないことにする．

Jacobi ベクトル場

定義　(C^∞-) 曲線 $h: \boldsymbol{R}\to M$ **に沿ったベクトル場** $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{R}\to TM$

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{v}$ は C^∞-写像で $\boldsymbol{v}(t)\in T_{h(t)}M$.

($\Longleftrightarrow$ 射影 $\pi: TM\to M$ について，$\pi\circ\boldsymbol{v}=h$)

$g: \boldsymbol{R}\to M$ を Riemann 多様体 M における測地線とする．

定義　測地線 g の**(測地的)変分** $V: \boldsymbol{R}\times(-\varepsilon, \varepsilon)\to M$

$\Longleftrightarrow$ $\varepsilon>0$ かつ V は C^∞-写像で，各 $\alpha\in(-\varepsilon, \varepsilon)$ について，

$$V_\alpha: \boldsymbol{R}\to M\ (\Longleftrightarrow V_\alpha(t)=V(\alpha, t)) \text{ は } M \text{ の測地線かつ } V_0=g.$$

定義　測地線 g に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{v}$ が **Jacobi ベクトル場**である．

$\Longleftrightarrow$ g の変分 V が存在して次をみたす：

(1.3)
$$\boldsymbol{v}(t)=\partial_\alpha V_\alpha(t)$$

注意 1.4　式(1.3)は C^∞-関数 $f: M\to\boldsymbol{R}$ に関する次の式を意味する：

$$\boldsymbol{v}(t)f=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(V_\alpha(t))|_{\alpha=0}$$

定義　測地線 $g: \boldsymbol{R}\to M$ の閉区間 $[0, a]$ $(0<a)$ への制限

$$s=g|[0,a]:[0,a]\longrightarrow M$$

を M における**測地線分**，$s(0)$ および $s(a)$ をそれぞれ測地線分の**始点**および**終点**という．

記号　$J_g=\{g$ に沿った Jacobi ベクトル場$\}$

$J_s=J_g|s=\{g$ に沿った Jacobi ベクトル場の s への制限$\}$

g の変分 V の各測地線 V_α は(始点) $V_\alpha(0)$ とそこにおける接ベクトル $\dot{V}_\alpha(0)$ で定まる．即ち，V は $(-\varepsilon,\varepsilon)$ から TM における $\dot{g}(0)$ の近傍への C^∞-曲線として定まる．さらに，V から (1.3) によって与えられる Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ はこの曲線の接ベクトルで定まる．従って，次のことがわかる：

(1.5)　J_g は $2\dim M$ 次元のベクトル空間で，制限で与えられる対応

$$s_*:J_g\longrightarrow J_s$$

は同型対応である．従って，J_g と J_s は同一視する．

記号　$\Lambda_g(t_0)=\{\boldsymbol{v}\in J_g|\boldsymbol{v}(t_0)=0\}$

$=\{t_0$ で消える g に沿った Jacobi ベクトル場$\}$

(1.6)　$\Lambda_g(t_0)$ の任意の Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は，$V(t_0,\alpha)=g(t_0)$ をみたす変分 V によって，$\boldsymbol{v}(t)=\partial_\alpha V_\alpha(t)$ で与えられる．

また，このような V は $h(0)=\dot{g}(t_0)$ をみたす $T_{g(t_0)}M$ 内の曲線 $h(\alpha)$ と $h(\alpha)=dV(t,\alpha)_{t=t_0}$ によって対応している．そのとき，V で与えられる Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は $\theta(\boldsymbol{v})=\dot{h}(0)$ で定まる．よって，

(1.7)　$$\theta:\Lambda_g(t_0)\cong T_{g(t_0)}M\quad(\text{同型})$$

部分多様体の焦点と測地線分の指数

N は Riemann 多様体 M の正則部分多様体とする．

定義　$g:\boldsymbol{R}\to M$ (または $g:[0,a]\to M,\ a>0$) は **M mod N の測地線** (または**測地線分**)

$\Longleftrightarrow$ g は M における測地線(測地線分)で $g(0)\in N$，$\dot{g}(0)\perp N$ をみたす．

($\boldsymbol{v}\perp N$ は T_xM のベクトル $\boldsymbol{v}$ が T_xN に垂直，即ち N の法ベクトルを示す．)

定義　$\boldsymbol{v}$ は g に沿った **M mod N の Jacobi ベクトル場**

$\Longleftrightarrow$ 次の性質をみたす g の変分 $V:\boldsymbol{R}\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to G$ から $\boldsymbol{v}$ が与えられる：

(1)　$\boldsymbol{v}(t)=\partial_\alpha V_\alpha(t)\quad(t\in\boldsymbol{R},\ \alpha\in(-\varepsilon,\varepsilon))$

(2) 各 V_α は $M \bmod N$ の測地線 ($V_\alpha(0) \in N$, $\dot{V}_\alpha(0) \perp N$)

記号 $J_g{}^N = \{g$ に沿った $M \bmod N$ の Jacobi ベクトル場$\}$

上の $V_\alpha(0)$ は N を動く道であり，逆に V はその様な道で定まるから，

(1.8) $$v \in J_g{}^N \Longleftrightarrow v \in J_g,\ v(0) \in T_{g(0)}N \subset T_{g(0)}M$$

定義 g を測地線，$s = g \mid [0, a]$ は $M \bmod N$ の測地線分とする．

(1) $\Lambda_s(t) = \Lambda_s{}^N(t) = J_g{}^N \cap \Lambda_g(t) = (s \mid [0, t]$ の**焦点核**$)$，$0 < t \leq a$

(2) $\lambda_s(t) = \lambda_s{}^N(t) = \dim \Lambda_s(t)$，$0 < t \leq a$

(3) s は $M \bmod N$ の**焦点線分** $\Longleftrightarrow \lambda_s(a) > 0$.

このとき，終点 $s(a)$ を $s \bmod N$ の**焦点**という．

(4) 測地線分 mod N の焦点にならない $M - N$ の点を N に関する M の**正則点**という．

(5) s は (Morse の意味で) **非退化** $\Longleftrightarrow \lambda_s(a) = 0$

($\Longleftrightarrow$ s は焦点線分ではない．)

(6) s の部分線分 $s' = s \mid [0, b]$ $(0 < b \leq a)$ において，s' の終点 $s(b)$ が $s' \bmod N$ の焦点であるとき，$s(b)$ を s の**例外点**という．

注意 1.9 焦点は測地線における共役点(N が1点の場合)の一般化である．

定義 $s : [0, a] \to M$ を $M \bmod N$ の測地線分とするとき，

(1.10) $$\lambda_s = \lambda_s{}^N = \sum_{0<t\leq a} \lambda_s(t) = \sum_{0<t\leq a} \dim(J_g{}^N \cap \Lambda_g(t))$$

を N に関する s の**指数**という(定理 1.14(1) 参照)．

Riemann 空間における道の空間

M をコンパクト Riemann 空間とし，A, B は M の部分空間とする．

A から B への区分的 C^∞-曲線 $u : [0, 1] \to M$ とは，$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ が存在して，$u \mid [t_{i-1}, t_i]$ は C^∞-写像，$u(0) \in A$，$u(1) \in B$ をみたすものである．

定義 $\Omega'(M, A, B) = \{u : [0, 1] \longrightarrow M \mid A$ から B への区分的 C^∞-曲線$\}$

$\Omega^*(M, A, B) = \{u \in \Omega'(M, A, B) \mid$ 弧長が助変数 t に比例する$\}$

$\Omega'(M, A, B)$ は次式で与えられる距離 ρ をもつ距離空間とする：

$$\rho(u, u') = \sup_{0 \leq t \leq 1} \{d(u(t), u'(t)) + |L(u) - L(u')|\}, \quad u, u' \in \Omega'(M, A, B)$$

ただし，d は M における距離，L は曲線の長さを表わす．

$$\Omega(M, A, B) = \{u : [0, 1] \longrightarrow M \mid u \text{ は連続で } u(0) \in A,\ u(1) \in B\}$$

にはコンパクト開位相を入れるものとするが，$\rho'(u,u')=\sup_{0\le t\le 1} d(u(t),u'(t))$ で与えられる距離空間の位相と同値であることはよく知られている．従って，

自然な対応 $i:\Omega'(M,A,B)\longrightarrow\Omega(M,A,B)$ は連続である．

$u\in\Omega'(M,A,B)$ に対して，$u\circ\varphi\in\Omega^*(M,A,B)$ をみたす単調増加関数 $\varphi:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ が定まる．$h_\theta(u)(t)=u((1-\theta)t+\theta\varphi(t))$ によって，

(1.11)　$\Omega^*(M,A,B)$ は $\Omega'(M,A,B)$ の変位レトラクトである．

定理 1.12　$i:\Omega'(M,A,B)\longrightarrow\Omega(M,A,B)$ は弱ホモトピー同値である．即ち，i はホモトピー群，ホモロジー群の同型を誘導する．

［証明］　$\Omega_n=\left\{u\in\Omega'(M,A,B)\ \middle|\ u\ \middle|\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right](i=1,2,\cdots,n)\text{ は測地線分}\right\}$ とおく．Ω_n は u の分点における値によって，$M^{n+1}=M\times\cdots\times M$ ($n+1$ 個) の部分空間と考えられ，その位相は $\Omega(M,A,B)$ の部分空間の位相をもつ．

任意の $f:I^k\to\Omega(M,A,B)$ を考える．M を，その中の 2 点が測地線で一意的に結べる十分小さい近傍 U_α で覆う．f の随伴写像 $F:I^k\times I\to M$ の像はコンパクトであるから，n を十分大にとると，$I^k\times I$ の中の一辺の長さ $\frac{1}{n}$ の立方体は F によってある U_α の中へ写される．このとき，I^k の各点 x について，$f(x)\left(\frac{i}{n}\right)=u\left(\frac{i}{n}\right)$ $(i=0,1,\cdots,n)$ となる $u\in\Omega_n$ が定まるから，

$f_\theta(x)(t)=$ ($f(x)(t)$ と $u(t)$ を結ぶ測地線分を $\theta:1-\theta$ の比に分ける点)

とおく．$f_\theta:I^k\to\Omega(M,A,B)$ はホモトピーで，$f(\partial I^k)=u_0\in\Omega_n$ ならば，$f_\theta(\partial I^k)=u_0$ である．$f_0=f$，$f_1(I^k)\subset\Omega_n$ であるから，

$$i_{n*}:\pi_k(\Omega_n)\longrightarrow\pi_k(\Omega(M,A,B))$$

において，$\pi_k(\Omega(M,A,B))$ の任意の元は，十分大きい n によって i_{n*} の像となる．i_{n*} は $\pi_k(\Omega'(M,A,B))$ を通るから，これは $i_*:\pi_k(\Omega'(M,A,B))\to\pi_k(\Omega(M,A,B))$ が全射であることを示している．

上の f_θ に関する議論は $\Omega'(M,A,B)$ でも全く同様に成り立つから，$\pi_{k-1}(\Omega'(M,A,B))$ の任意の元 α は Ω_m への写像で表わされるとしてよい．$i_*(\alpha)=0$ のとき，それを示すホモトピーを $f:I^{k-1}\times I=I^k\to\Omega(M,A,B)$ とし，n を十分大きい m の倍数にとって上の f_θ を作る．f_θ の定義から，

$$f(x)\in\Omega_m\Longrightarrow f_\theta(x)=f(x)$$

従って，$f|I^{k-1}\times 0=f_1|I^{k-1}\times 0\simeq f_1|I^{k-1}\times 1=f|I^{k-1}\times 1=$ 定値写像．ここでホモトピー $f_1|I^{k-1}\times I$ は Ω_n におけるものであるから，α は $\pi_{k-1}(\Omega_n)$，従って

$\pi_{k-1}(\Omega'(M, A, B))$ において 0 である．以上で i_* が単射も示された．　(終)

M は弧状連結であるから，M の 2 点 p, q を結ぶ道を w とするとき，

$$*w : \Omega(M, A, p) \longrightarrow \Omega(M, A, q)$$

は逆の道 $\overline{w}$ による $*\overline{w}$ をホモトピー逆写像とするホモトピー同値写像である．従って，M の基点 x_0 を任意にとって，通例の記号による

$$\Omega(M, A) = \Omega(M, A, x_0)$$

は任意の点 p についての $\Omega(M, A, p)$ とホモトピー同値である．

系 1.13　M の任意の点 r と任意の部分空間 N について，$\Omega^*(M, N, r)$ は $\Omega(M, N)$ に弱ホモトピー同値である．

Morseの理論より

M. Morse の著書 "The Calculus of Variations in the Large" AMS (1934) より主要な結果を引用する．Morse の理論については，解説書も多いので，それによって研究されたい．

M は完備かつ連結な Riemann 多様体，N はその正則部分多様体とする．

定理 1.14　(1)　すべての $M \bmod N$ の測地線分 s の指数は有限である．

(2)　$M \bmod N$ の正則点はいたる所稠密に存在する．

(3)　r は $M \bmod N$ の正則点，l を正の数とするとき，r を終点とする $M \bmod N$ の測地線分で長さ l 以下のものは有限個しかない．

記号　$S(M, N, r) = \{s : [0,1] \longrightarrow M \mid s$ は $M \bmod N$ の測地線分，$s(1) = r\}$

注意　$S(M, N, r) \subset \Omega^*(M, N, r)$ と考える．

r を $M \bmod N$ の正則点とするとき，定理 1.14(3) により $S(M, N, r)$ は離散集合で，長さをとる関数

$$L : \Omega^*(M, N, r) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

の臨界点の集合と一致する．さらに詳しい次の定理が Morse の理論の基本である (補題 6.6 参照)．

定理 1.15　$s \in S(M, N, r)$ は非退化でその指数を λ_s とする．このとき，次元が λ_s である単体 σ_s と写像 $\phi_s : \sigma_s \to \Omega^*(M, N, r)$ が存在して，σ_s の重心 b_s について，次が成り立つ：

(1)　$\phi_s(b_s)=s$

(2)　$L\circ\phi_s:\sigma_s\to\boldsymbol{R}$ は b_s で最大値 c をとる．

(3)　$L\circ\phi_s$ は b_s の近くで C^∞ かつ最大値は非退化（$L\circ\phi_s$ の b_s の近くの適当な座標による展開は負定値 2 次形式より始まる）．

(4)　このような σ_s と ϕ_s について，$\{u\in\Omega^*\mid L(u)<c\}\cup s$ は s の近くで $\{u\in\Omega^*\mid L(u)\leq c-\varepsilon\}\cup\phi_s(\sigma_s)$ を変位レトラクトにもつ．

(1.16)　$\Omega^*=\Omega^*(M,N,r)$

と略記し，関数 L に関して，次のような部分空間を考える：

$\{c_k;\ k=1,2,3,\cdots\}=L(S(M,N,r))$，ただし $c_k\in\boldsymbol{R}$ は大きさの順序

$$c_1<c_2<c_3<\cdots\cdots$$

に並んでいるとする．Ω^* の部分空間 Ω_k，Ω_k^- を次の様に定義する：

$$\Omega_k=\{u\in\Omega^*\mid L(u)\leq c_k\},\qquad \Omega_k^-=\{u\in\Omega^*\mid L(u)<c_k\}$$

L の各点による逆像に transversal な flow に沿って，Ω_{k+1}^- を Ω_k まで変形することによって，Ω_k は Ω_{k+1}^- の変位レトラクトとなる．これをさらに進めるには，$\omega_k=\{s\in S(M,N,r)\mid L(s)=c_k\}$ が障害になるから，それを避けて，Ω_k は $\Omega_k^-\cup\omega_k$ の中へ変形することができる．定理 1.15 を使って，Ω_k は $\{u\in\Omega_k\mid L(u)\leq c_k-\varepsilon\}\bigcup_{s\in\omega_k}\phi_s(\sigma_s)$ を変位レトラクトにもつことがわかる．従って，切除公理とホモトピー公理によって，

$$\sum_{s\in\omega_k}H_*(\sigma_s,\partial\sigma_s)\cong H_*(\Omega_k,\Omega_k^-)\cong H_*(\Omega_k,\Omega_{k-1})$$

以上のようにして，次の定理が導かれる．

定理 1.17　$\sum_{s\in\omega_k}H_*(\sigma_s,\partial\sigma_s)\cong H_*(\Omega_k,\Omega_{k-1})$，ただし $\dim\sigma_s=\lambda_s$．

Morse 級数

定義　$\mathcal{M}(M,N,r;\ t)=\sum_{s\in S(M,N,r)}t^{\lambda_s}$ を $M\bmod N$ の **Morse 級数**という．ただし，この級数は各係数が有限で確定するとき**存在する**ということにする．

定理 1.18　**(Morse の不等式)**　r は $M\bmod N$ の正則点とし，Morse 級数 $\mathcal{M}(M,N,r;\ t)$ が存在すると仮定する．任意の係数体 $\boldsymbol{k}$ に対して，非負整係数の形式的巾級数 $B(\boldsymbol{k};\ t)=\sum_{i\geq0}b_it^i$　(b_i は負でない整数)が存在して，

$$\mathcal{M}(M,N,r;\ t)=P(\Omega(M,N),\boldsymbol{k};\ t)+(1+t)B(\boldsymbol{k};\ t)$$

をみたす．ただし，$P(\Omega(M, N),\ \boldsymbol{k};\ t)=\sum_{i\geq 0}\dim H_i(\Omega(M, N);\ \boldsymbol{k})t^i$ は Poincaré 級数である．

注意 1.19　$\mathcal{M}(M, N, r;\ t)=\sum m_i t^i$，$P(\Omega(M, N),\ \boldsymbol{k};\ t)=\sum p_i t^i$ とおくとき，

$$m_i-p_i=b_i+b_{i-1}\quad (i=0, 1, 2, \cdots;\ b_{-1}=0)$$

が成り立つ．特に，

$$m_0\geq p_0,$$
$$m_1-m_0\geq p_1-p_0,$$
$$m_2-m_1+m_0\geq p_2-p_1+p_0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

が成り立つ．これがよく知られた **Morse の不等式**であり，この不等式系は定理 1.18 と同値である．

この定理 1.18 は定理 1.17 から代数的に証明される．記述を簡単にするために次の定義をおく．

定義　2つの形式的巾級数 $P(t)$ と $Q(t)$ に対して，非負係数の形式的巾級数 $B(t)$ が存在して，$P(t)-Q(t)=(1+t)B(t)$ をみたすとき，$P(t)$ は $Q(t)$ を支**配する**といい，$P(t)\succ Q(t)$ で表わす．

補題 1.20　$C=\sum_{i\geq 0} C_i$ を体 $\boldsymbol{k}$ 上の有限型チェイン複体とするとき，C の Poincaré 級数はホモロジー群 $H_*(C)=\sum_{i\geq 0} H_i(C)$ の Poincaré 級数を支配する：

$$P(C, t)\succ P(H_*(C), t)$$

［証明］　$c_i=\dim C_i$，$h_i=\dim H_i(C)$，$z_i=\dim Z_i(C)$，$b_i=\dim B_i(C)$ とするとき，完全系列 $0\to Z_i(C)\to C_i\xrightarrow{\partial} B_{i-1}(C)\to 0 \Longrightarrow c_i=z_i+b_{i-1}$．$H_i(C)=Z_i(C)/B_i(C)\Longrightarrow h_i=z_i-b_i$．故に，$B(t)=\sum b_i t^i$ について，

$$P(C, t)-P(H_*(C), t)=\sum c_i t^i-\sum h_i t^i=\sum(z_i+b_{i-1}-(z_i-b_i))t^i$$
$$=\sum(b_i+b_{i-1})t^i=(1+t)B(t)\qquad (終)$$

［定理 1.18 の証明］

第3章§2のスペクトル系列の構成と同様に，特異チェイン複体 $C_*(\Omega^*;\ \boldsymbol{k})$ の部分複体 $A_p=C_*(\Omega_p;\ \boldsymbol{k})$ を考えると，$A_p\supset A_{p-1}$，$dA_p\subset A_p$ であるから，スペクトル系列 $\{E^r_{p,q}\}$ が定義されて，

$$E^0_{p,q}=C_{p+q}(\Omega_p;\ \boldsymbol{k})/C_{p+q}(\Omega_{p-1};\ \boldsymbol{k})\cong C_{p+q}(\Omega_p, \Omega_{p-1};\ \boldsymbol{k}),$$

$$E^1_{p,q}=H_{p+q}(\Omega_p, \Omega_{p-1};\ \boldsymbol{k})$$

をみたす．$E_n{}^r=\sum_{p+q=n} E^r_{p,q}$，$E^r=\sum_n E_n{}^r$ とおけば，定理 1.17 によって

$$E_n{}^1=\sum_{\lambda_s=n} H_*(\sigma_s, \partial\sigma_s;\ \boldsymbol{k})=\sum_{\lambda_s=n} H_n(\sigma_s, \partial\sigma_s;\ \boldsymbol{k})$$

であるから，

$$P(E^1, t)=\sum_s t^{\dim \sigma_s}=\sum_s t^{\lambda_s}=\mathcal{M}(M, N, r;\ t)$$

であることがわかる．$H(E^r)=E^{r+1}$ であるから，補題 1.20 によって，

$$P(E^1, t)\succ P(E^2, t)\succ\cdots\succ P(E^r, t)\succ P(E^{r+1}, t)\succ\cdots$$

ここで，$\succ$ は推移律をみたすことに注意する．$\mathcal{M}(M, N, r;\ t)$ が存在するという仮定から，上の $\succ$ でつながった系列は t に関するある有限次以下の部分に注目すれば，ある所から先は一定である．一方，特異単体 $f: \Delta^n\to\Omega^*$ について，$L\circ f: \Delta^n\to\boldsymbol{R}$ の像はコンパクトであるから，f の像はある Ω_p に含まれる．従って，$H_n(\Omega^*;\ \boldsymbol{k})$ の任意の元はある p について，$H_n(\Omega_p;\ \boldsymbol{k})$ からの像となる．以上のことを組み合わせると，n に対して p を十分大にとるとき，

$$P(E^p, t)\equiv P(H_*(\Omega^*;\ \boldsymbol{k}), t) \mod (t^n)$$

となる．このとき，$P(E^1, t)=P(E^p, t)+(1+t)B_n(t)$ となる $B_n(t)$ があり，$B_n(t)\equiv B_{n+1}(t) \mod (t^n)$ である．従って，$B(t)\equiv B_n(t) \mod (t^n)$ となる $B(t)$ があって，

$$\mathcal{M}(M, N, r;\ t)=P(E^1, t)=P(H_*(\Omega^*, \boldsymbol{k}),\ t)+(1+t)B(t)$$

系 1.13 によって，Ω^* は $\Omega(M, N)$ でおきかえてよいから，定理 1.18 は証明された．　(終)

定理 1.21　$S(M, N, r)$ の各測地線分 s の指数 λ_s がすべて偶数であり，同じ指数をもつ s の個数が有限であれば，次が成り立つ：

(1)　$H_{2i-1}(\Omega(M, N))=0$

(2)　$H_{2i}(\Omega(M, N))$ は自由アーベル群．

(3)　$P(\Omega(M, N),\ t)=\sum_{s\in S(M,N,r)} t^{\lambda_s}$

［証明］　$\mathcal{M}(M, N, r;\ t)=\sum t^{\lambda_s}$ は奇数次数の項を含まないから，定理 1.18 の等式において，$B(\boldsymbol{k};\ t)=0$，従って，$P(\Omega(M, N), \boldsymbol{k};\ t)=\mathcal{M}(M, N, r;\ t)$．これは任意の標数の体 $\boldsymbol{k}$ でいえるから，普遍係数定理を使って定理が示される．

(終)

§2　局所 K-運動と変分完備性

K-横断的測地線と局所 K-運動

以後この章では，多様体 M にコンパクト Lie 群 K が

$$\mu : K\times M \longrightarrow M, \quad \mu(k, x)=k\cdot x$$

で作用し，M は K-不変な Riemann 計量をもつ完備 Riemann 多様体とする．

記号　M の点 x について，

$$K\cdot x=\{k\cdot x \mid k\in K\} \qquad (x \text{ の } K\text{-軌道})$$

$$K_x=\{k\in K \mid k\cdot x=x\} \qquad (x \text{ の安定化群}=x \text{ の等方群})$$

自然な対応 $k\mapsto k\cdot x$ は次の同相を与える：

(2.1)　$$K/K_x\cong K\cdot x$$

定義　M の上の曲線(特に測地線) h は **K-横断的**

$\Longleftrightarrow$ h 上の各点 $h(t)$ について，　$\dot{h}(t)\perp K\cdot h(t)$

$\Longleftrightarrow$ h は各 K-軌道と直交する．

定義　測地線 g に沿った Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ は **K-横断的**

$\Longleftrightarrow$ すべての V_α が K-横断的測地線であるような g の変分 V によって，

$$\boldsymbol{v}(t)=\partial_\alpha V_\alpha(t)$$

記号　$J_g{}^K=\{\boldsymbol{v}\in J_g \mid \boldsymbol{v} \text{ は } K\text{-横断的}\}$

$J_g{}^K(t_0)=\{\boldsymbol{v}\in J_g{}^K \mid \boldsymbol{v}(t_0) \text{ は } K\cdot g(t_0) \text{ に接する}\}$

K の Lie 環 $L(K)=T_eK$ の元 $X\in L(K)$ について，　$M\ni x\mapsto(\exp tX)\cdot x$ は M の運動を与えている．この極限として局所 K-運動が定義される．

定義　$\dot{\mu}(X)(x)=\partial_t(\exp tX\cdot x)\in T_xM$ で与えられる M 上のベクトル場 $\dot{\mu}(X)$ を，X で定まる**局所 K-運動**という．

射影 $K\to K/K_x\cong K\cdot x$ は接空間の全射を誘導するから，

(2.2)　$x\in M$ の K-軌道 $K\cdot x$ の x における接空間のベクトルは，局所 K-運動の x における値で与えられる：　$T_x(K\cdot x)=\{\dot{\mu}(X)(x) \mid X\in L(K)\}$．

定理 2.3　g が K-横断的測地線ならば，局所 K-運動の g への制限 $\boldsymbol{v}$ ($\Longleftrightarrow \boldsymbol{v}(t)=\dot{\mu}(X)g(t)$, $X\in L(K)$) は K-横断的 Jacobi ベクトル場であり，任意の t_0 について，$\boldsymbol{v}\in J_g{}^K(t_0)$．

［証明］ $\boldsymbol{v}$ は変分 $V_\alpha(t)=(\exp \alpha X)\cdot g(t)$ で与えられ，g が K-横断的$\Longrightarrow \dot{g}(t) \perp K\cdot g(t)$. $x\mapsto(\exp \alpha X)\cdot x$ は等長変換であるから，$\dot{V}_\alpha(t)\perp K\cdot g(t) \Longrightarrow V_\alpha$ は K-横断的$\Longrightarrow \boldsymbol{v}$ は K-横断的. $V_\alpha(t_0)$ は $K\cdot g(t_0)$ の曲線$\Longrightarrow \boldsymbol{v}(t_0)$ は $K\cdot g(t_0)$ に接する$\Longrightarrow \boldsymbol{v}\in J_g{}^K(t_0)$. （終）

記号 定理 2.3 によって与えられる対応 $X\mapsto \boldsymbol{v}$ を

$$\pi_g : L(K)=\mathfrak{k}\longrightarrow J_g{}^K(t_0)\subset J_g{}^K \quad (t_0 : \text{任意})$$

で表わす.

補題 2.4 M の測地線 $g : \boldsymbol{R}\longrightarrow M$ と $\boldsymbol{R}\ni t_0$ について，$\dot{g}(t_0)\perp K\cdot g(t_0)$ ならば g は K-横断的である. 即ち，測地線の K-横断性はある 1 点での K-横断性よりえられる.

［証明］ その中の 2 点を測地線で一意的に結べるような $g(t_0)$ の ε-近傍 U に $g([t_0, t_1])$ が入る場合に，$\dot{g}(t_1)\perp K\cdot g(t_1)$ を示せばよい. $g|[t_0, t_1]$ の長さを l とするとき，次の Gauss の定理が成り立つ（ρ は測地線で測った距離）：

$$(2.4)' \qquad \dot{g}(t_1)\perp \{y\in M \mid \rho(g(t_0), y)=l\}$$

$\dot{g}(t_0)\perp K\cdot g(t_0)$ であるから，(2.4)′ で t_0 と t_1 を入れかえて考えることにより，

$$\rho(x, g(t_1))=l+o(\rho(x, g(t_0))), \quad x\in K\cdot g(t_0)$$

同様なことは，$\dot{g}(t_1)\perp K\cdot g(t_1)$ ならばいえるが，そうでないと仮定すると，K 内の e から始まる曲線 $k(t)$ で，$h(t)=k(t)\cdot g(t_1)$ の接ベクトル $\dot{h}(0)$ が $g(t_1)$ と直交しないものがある. 助変数 t を h の長さに比例するようにとり直せば次のことがわかる：

$$\rho(g(t_0), h(t))=l+at+o(t) \quad (a\neq 0)$$

K の作用は等長であるから，$\rho(g(t_0), h(t))=\rho(k(t)^{-1}\cdot x, g(t_1))$. 従って，$l=l+at+o(t)$ となり矛盾である. 故に，$\dot{g}(t_1)\perp K\cdot g(t_1)$. （終）

注意 2.5 上の証明で使った Gauss の定理の証明には若干の微分幾何学の知識が必要である. しかし，後に応用される場合は，測地線が 1 助変数部分群を使って与えられており，その場合に補題 2.4 を直接証明するのは容易である.

変分完備性と K-横断的測地線の指数

定義 K の M への作用が**変分完備**$\Longleftrightarrow J_g{}^K(0)\cap J_g{}^K(1)\subset \pi_g(L(K))$ が M における任意の測地線 g について成り立つ.

補題 2.6 K の M への作用が変分完備 $\Longleftrightarrow J_g{}^K(0)\cap \Lambda_g(1)\subset \pi_g(L(K))$.

［証明］［$\Longrightarrow$］ $\Lambda_g(1)\subset J_g{}^K(1)$ より明らか.

［$\Longleftarrow$］ $v\in J_g{}^K(0)\cap J_g{}^K(1)$ とすると, $v(1)\in T_{g(1)}M$. (2.2) によって, $X_1\in L(K)$ が存在して, $v_1=\pi_g(X_1)$ について, $v_1(1)=v(1)$. $v-v_1\in \Lambda_g(1)\cap J_g{}^K(0)$ となるから, $v-v_1\in\pi_g(L(K))\Longrightarrow v\in\pi_g(L(K))$. (終)

測地線 g の助変数 t を一次式で変換しても測地線であるから, 変分完備性の定義における $t=0,1$ は本質的なものではない. 即ち,

(2.7) K の M への作用が変分完備

$\Longleftrightarrow$ 任意の $t_0\neq t_1$ について, $J_g{}^K(t_0)\cap J_g{}^K(t_1)\subset\pi_g(L(K))$.

$\Longleftrightarrow$ 任意の $t_0\neq t_1$ について, $J_g{}^K(t_0)\cap \Lambda_g(t_1)\subset\pi_g(L(K))$.

K-横断的測地線およびその制限である測地線分

$$g: \boldsymbol{R}\longrightarrow M,\quad s=g|[0,a]:[0,a]\longrightarrow M$$

を考える. 始点 $p=s(0)=g(0)$ について, M のコンパクト部分多様体

$$N=K\cdot p \quad (\text{始点の } K\text{-軌道})$$

と g は p で直交する. これは s が $M \bmod N$ の測地線分であることに外ならない. 補題 2.4 によって次がえられる：

(2.8) g を M における測地線, $s=g|[0,1]$, $N=K\cdot s(0)$, $r=s(1)$ とする.

(1) s は $M\bmod N$ の測地線分 $\Longleftrightarrow$ s は K-横断的測地線分.

(2) $\Lambda_s{}^N(t)=J_g{}^N\cap\Lambda_g(t)=J_g{}^K\cap\Lambda_g(t)$, $0<t\leq 1$

従って, $s\in S(M,N,r)$ の指数は

$$\lambda_s=\sum_{0<t\leq 1}\dim(J_g{}^K\cap\Lambda_g(t))$$

K の作用が変分完備であるときは, 指数 λ_s を s の例外点の安定化群で表わすことができる. 測地線分 s について,

$$K_s=\{k\in K\mid s\text{ 上の各点 } x \text{ について, } k\cdot x=x\}$$

と書く. 測地線 g についても同様な記号 K_g を用いる.

補題 2.9 g を K-横断的測地線, s を g の一部である測地線分とすれば $K_s=K_g$. さらに, s 上の点 r の軌道 $K\cdot r$ が (K-軌道のうちで) 最大次元のものであれば, K_r と K_s の単位元成分は一致し, $\dim K_r=\dim K_s$.

［証明］ K_s の元 k は測地線 g を測地線 g' に写すが, s 上では一致している

から，$g'=g$．故に $K_s\subset K_g$．明らかに $K_g\subset K_s$．よって $K_g=K_s$．

s 上の点 x について，つねに $K_x\supset K_s$．q を s 上の正則点とする(定理 1.14 (2))．$\dim K_q>\dim K_s$ と仮定すると，$X\in L(K_q)-L(K_s)$ の局所 K-運動によって，q で消える 0 でない Jacobi ベクトル場がえられて，q の正則性に反する．故に $\dim K_q=\dim K_s$ で，これは s 上の q について最小である．仮定から，$\dim K_r$ は最小であるから，$\dim K_r=\dim K_s$．$K_r\supset K_s$ であるから，K_r と K_s の単位元成分は一致する．　(終)

定理 2.10　$s:[0,1]\longrightarrow M$ は $M \bmod K\cdot p$, $p=s(0)$，の測地線分で，最大次元の軌道をもつ点を通るとする．そのとき，

(1)　$\dim K_{s(t)}-\dim K_s\le\lambda_s(t)=\dim(J_g{}^K(0)\cap\Lambda_g(t))$　$(0<t\le 1)$

(2)　K の作用が変分完備であれば(1)で等号が成り立つ．

［証明］(1)

$$\pi_g:L(K)\longrightarrow J_g{}^K(0)$$

と，$x\in s([0,1))$ における値を対応させる写像

$$e_x:J_g{}^K(0)\longrightarrow T_x(K\cdot x)\Longleftrightarrow e_x(v)=v(x)$$

を考える．ここで，$J_g{}^K(0)\cap\Lambda_g(t)=\mathrm{Ker}(e_{s(t)})$ である．

$e_x\circ\pi_g:L(K)\to T_x(K\cdot x)$ は $\cdot x:K\to K\cdot x\cong K/K_x$ の微分で与えられるから，$\mathrm{Ker}(e_x\circ\pi_g)=L(K_x)$ である．

最大次元の軌道をもつ $r=s(t_0)$ について，補題 2.9 より $L(K_r)=L(K_s)$．明らかに，$L(K_s)\subset\mathrm{Ker}\,\pi_g$．また，$L(K_r)=\mathrm{Ker}(e_r\circ\pi_g)\supset\mathrm{Ker}\,\pi_g$．よって，$L(K_s)=L(K_r)=\mathrm{Ker}\,\pi_g$．　$\pi_g(L(K_{s(t)}))\subset\mathrm{Ker}\,e_{s(t)}$ であるから，

$$\begin{aligned}\lambda_s(t)&=\dim(J_g{}^K(0)\cap\Lambda_g(t))=\dim\mathrm{Ker}\,e_{s(t)}\ge\dim\pi_g(L(K_{s(t)}))\\&=\dim L(K_{s(t)})-\dim\mathrm{Ker}\,\pi_g=\dim L(K_{s(t)})-\dim L(K_s)\\&=\dim K_{s(t)}-\dim K_s\end{aligned}$$

(2)　K の作用が変分完備であれば，$\mathrm{Ker}\,e_{s(t)}=J_g{}^K(0)\cap\Lambda_g(t)\subset\pi_g(L(K))\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker}\,e_{s(t)}=\pi_g(\pi_g{}^{-1}(\mathrm{Ker}\,e_{s(t)}))=\pi_g(\mathrm{Ker}(e_{s(t)}\circ\pi_g))=\pi_g(L(K_{s(t)}))$．故に，上の不等式で等号が成り立つ．　(終)

定義　最大次元の K-軌道 $K\cdot r$ をもつ点 r と任意の点 $q\in M$ について，

$$\delta(q)=\dim K\cdot r-\dim K\cdot q$$

を q の**不足指数**という．

明らかに，

(2.11) $$\delta(q)=\dim K_q-\dim K_r$$

定理 2.12 K の M への作用は変分完備，点 r は最大次元の K-軌道をもつとするとき，r を終点とする $M \bmod K\cdot p$ の測地線分 $s\in S(M, K\cdot p, r)$ は K-横断的かつ (Morse の意味で) 非退化であり，その指数は次で与えられる：

$$\lambda_s=\sum_{0<t<1}\delta(s(t))=\sum_{0<t<1}(\dim K_{s(t)}-\dim K_s)$$

［証明］ 補題 2.4 によって s は K-横断的．定理 2.10 から，$\lambda_s(t)=\dim K_{s(t)}-\dim K_s$．特に，$\lambda_s(1)=\dim K_r-\dim K_s=0$ であるから，s は非退化．定理 1.14 (2) と補題 2.9 から s 上の正則点は開かつ稠密．従って，$\lambda_s(t)>0$ となる t は有限個である．故に，$\lambda_s=\sum\lambda_s(t)=\sum(\dim K_{s(t)}-\dim K_s)=\sum\delta(s(t))$． (終)

Lie 群と等質空間における測地線

定理 2.13 Lie 群 G は不変 Riemann 計量をもつとする．G の測地線 $g:\boldsymbol{R}\longrightarrow G$ について，$x=g(0)^{-1}$ とするとき，$L_x\circ g$ および $R_x\circ g$ は1助変数部分群である．逆に G の1助変数部分群 $g':\boldsymbol{R}\longrightarrow G$ は測地線である．

単位元 e において測地線で定義される指数写像 $\exp_e$ と1助変数部分群で定義された指数写像 exp とは一致する： $\exp_e=\exp:\mathfrak{g}=T_eG\longrightarrow G.$

［証明］ L_x，R_x は等長変換であるから，$g(0)=e$ としてよい．

測地線 $g:\boldsymbol{R}\to G$，$g(0)=e$，を考え，e の ε-近傍 U を十分小さくとり，その中で2点を結ぶ測地線は一意的であるようにする．$x=g(a)\in U$ $(0\leq a<\varepsilon)$ を考え $y=g(-a)$ とおく．y と x を結ぶ道 h を

$$h:[-a, a]\longrightarrow G \Longleftrightarrow h(t)=\begin{cases} yg(t+a) & (-a\leq t\leq 0)\\ g(t-a)x & (0\leq t\leq a)\end{cases}$$

で定義する．$g|[-a, 0]$ と $g|[0, a]$ の長さは等しく，L_y, R_x は等長変換であるから，h の長さは $g|[-a, a]$ の長さに等しい．測地線 $g|[-a, a]$ は y と x を結ぶ唯一つの最短曲線であり，g および h の弧長は変数 t に比例しているから，h は $g|[-a, a]$ と一致する．特に $h|[0, a]=g|[0, a]$ より，

$$0\leq t\leq a \Longrightarrow g(t)=g(t-a)g(a)\Longrightarrow g(a)=g(t-a)^{-1}g(t)$$

$t=0$，$a=s$ とおいて，$g(s)=g(-s)^{-1}$．さらに $a-t=s$ とおいて，

$$s, t, s+t\in[0, \varepsilon) \Longrightarrow g(-s)=g(s)^{-1},\ \ g(s)g(t)=g(s+t)$$

これらの等式が $(-\varepsilon, \varepsilon)$ でも成立することは容易にわかるから，$g|(-\varepsilon, \varepsilon)$ は

ある1助変数部分群 g' の制限である．任意の t_0 について $L_{g'(t_0)}$ は等長変換であるから，$g'|(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$，従って，$g'$ 全体も測地線である．測地線は一部で一致すれば全体でも一致するから，$g=g'$ は1助変数部分群となる．

逆に，1助変数部分群 g' が与えられたとき，g' の初期ベクトルを $\dot{g}(0)$ とする測地線 g がある．上のように g は1助変数部分群である．1助変数部分群は初期ベクトルで定まるから，$g'=g$，即ち g' は測地線である．また，この議論から $\exp_e=\exp$ は明らかであろう．　(終)

不変 Riemann 計量の与えられた Lie 群 G の等質空間 G/H には，次の補題で定まる G-不変 Riemann 計量を与えるものとする．

補題 2.14　射影 $p: G\longrightarrow G/H$ から誘導される $dp_x: T_xG\longrightarrow T_{p(x)}(G/H)$ について，$X, Y\in T_{p(x)}(G/H)$ の内積を，$dp_x\overline{X}=X$，$dp_x\overline{Y}=Y$，$\overline{X}\perp T_xH$，$\overline{Y}\perp T_xH$ となる $\overline{X}, \overline{Y}$ について，$(X, Y)=(\overline{X}, \overline{Y})$ で定義すれば，G/H に G-不変 Riemann 計量が与えられる．

［証明］　上の内積の定義において，$\overline{X}, \overline{Y}$ は x を固定すれば一意的に定まる．x を $p(y)=p(x)$ となる y でおきかえるとき，$h=x^{-1}y$ について R_h が等長変換であるから，$(\overline{X}, \overline{Y})=(dR_h\overline{X}, dR_h\overline{Y})$．これは上の内積の定義が x のとり方に無関係に定まることを示している．この Riemann 計量が G の左からの作用について不変なことは明らかである．　(終)

定理 2.15　等質空間 G/H に補題 2.14 のように G-不変 Riemann 計量が与えられているとする．G/H の任意の測地線 g は $g(t)=p(y\exp(tX))$，$y\in G$，$X\in L(H)^\perp=(L(G)$ における $L(H)$ の直交補空間$)$ の形に一意的に表わされる．

［証明］　$g(0)=p(y)$ となる $y\in G$ をとると，左移動 L_y は G および G/H の等長変換で直交性も保つから，$y=e$ の場合を考えれば十分である．

G/H における道 h に対して，G の道 $\tilde{h}$ で $h=p\circ\tilde{h}$ かつ $\tilde{h}$ は各 H-軌道と直交するものが一意的にとれる．このとき，h と $\tilde{h}$ の孤長は等しい．特に $\tilde{h}$ が測地線ならば h もそうである．$X\in L(H)^\perp$ に対して $\tilde{h}(t)=\exp(tX)$ はそのような G の測地線で，$g(t)=p(\exp(tX))$ は G/H の測地線である．同型 $L(H)^\perp\cong T_{p(e)}(G/H)$ より補題がえられる．　(終)

§3 対称空間における変分完備性

対称対の Lie 環

この§では，G はコンパクト連結 Lie 群で不変 Riemann 計量をもつものとする．また，K は G の連結閉部分群とする．

復習 (G, K) は**対称対** $\Longleftrightarrow$ $\sigma^2=1_G$ をみたす自己同型 $\sigma: G \to G$ があって，

K は $\{g \in G \mid \sigma(g)=g\}$ の単位元成分である．

対称対 (G, K) において，G の不変 Riemann 計量と σ で誘導されるものとの平均をとることによって，G の不変 Riemann 計量は σ でも不変であると考えてよい．そのとき，σ は等長変換である．

さらに，G/K に補題 2.14 の Riemann 計量を与えるとき，対応

$$\sigma_x : yK \longmapsto x\sigma(x)^{-1}\sigma(y)K \quad (x, y \in G)$$

は，xK を通る測地線を xK を中心に逆方向へ写す G/K の等長変換となる．即ち，G/K は対称空間である．G および K の Lie 環をそれぞれ

$$\mathfrak{g}=L(G) \text{ および } \mathfrak{k}=L(K)$$

で表わす．

定理 3.1 (G, K) が対称対であるための必要十分条件は，$\mathfrak{k}$ の直交補空間 $\mathfrak{p}=\mathfrak{k}^{\perp}$ について次が成り立つことである：

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$$

［証明］（必要性） 対称対 (G, K) を定義する自己同型 σ の誘導する $\mathfrak{g}$ の自己同型を同じ σ で書く．明らかに，$\mathfrak{k}=\{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X)=X\}$ である．

$\mathfrak{p}=\{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X)=-X\}$ とおく． 等式 $X=(X+\sigma(X))/2+(X-\sigma(X))/2$ は $\mathfrak{g}$ の直和分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を与える．$Y \in \mathfrak{k}$, $Z \in \mathfrak{p}$ のとき，σ は内積を保つから，$(Y, Z)=(\sigma Y, \sigma Z)=(Y, -Z)=-(Y, Z) \Longrightarrow (Y, Z)=0$． 故に，$\mathfrak{p}=\mathfrak{k}^{\perp}$． また，$\sigma[Y, Z]=[\sigma Y, \sigma Z]=[Y, -Z]=-[Y, Z] \Longrightarrow [Y, Z] \in \mathfrak{p}$． 故に，$[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$．

$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ も同様に示される．

（十分性） Lie 群と Lie 環の関係(第2章定理 5.11′)によって，$\mathfrak{k}=\{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X)=X\}$，および $\sigma^2=1$ をみたす Lie 環 $\mathfrak{g}$ の自己同型 σ の存在を示せばよい．

$X \in \mathfrak{g}$ を $X=Y+Z$，$Y \in \mathfrak{k}$，$Z \in \mathfrak{p}$，と分解するとき，

$$\sigma(Y+Z)=Y-Z$$

で σ を定義する．明らかに，$\sigma^2=1$ および $\mathfrak{k}=\{X\in\mathfrak{g}\,|\,\sigma(X)=X\}$．また σ が準同型であることは，$X'=Y'+Z'$，$Y'\in\mathfrak{k}$，$Z'\in\mathfrak{p}$，について，

$$\sigma[X,X']=([Y,Y']+[Z,Z'])-([Y,Z']+[Z,Y'])=[\sigma X,\sigma X']$$

であるから正しい．（終）

簡単のために次のように略記する：

記号　$e^X=\exp X\in G\quad(X\in\mathfrak{g}=T_eG=L(G))$

$$x\cdot A=dL_x(A),\quad A\cdot x=dR_x(A)\quad(x\in G,\ A\subset TG)$$

随伴作用

$$Adx:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\iff Adx(X)=x\cdot X\cdot x^{-1}\quad(x\in G,\ X\in\mathfrak{g})$$

$$adY:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}\iff adY(X)=[Y,X]\qquad(X,Y\in\mathfrak{g})$$

および，不変な内積（不変 Riemann 計量，または **Killing 形式**）（ , ）について次が成り立つ：

(3.2.1)　$Adx([X,Y])=[Adx(X),\ Adx(Y)]$

(3.2.2)　$(X,Y)=(Adx(X),\ Adx(Y))$

(3.2.3)　$\dfrac{d}{dt}(Ade^{tY}(X))\big|_{t=0}=adY(X)=[Y,X]$

(3.2.4)　$([X,Y],Z)+(Y,[X,Z])=0$

第1式は Adx が Lie 環の準同型であること，第2式は内積を保つことを示している．第3式は第2章(5.15)であり，第4式は第5章(5.34)である．

記号　$a\in G$ について，

$$\mathfrak{k}_a=\mathfrak{k}\cap Ada^{-1}(\mathfrak{k}),\qquad\mathfrak{p}_a=\mathfrak{p}\cap Ada^{-1}(\mathfrak{p})$$

$$\mathfrak{k}^a=\mathfrak{k}+Ada^{-1}(\mathfrak{k})$$

定理 3.1 と (3.2.1) より，

(3.3)　$[\mathfrak{k}_a,\mathfrak{k}_a]\subset\mathfrak{k}_a,\quad[\mathfrak{k}_a,\mathfrak{p}_a]\subset\mathfrak{p}_a,\quad[\mathfrak{p}_a,\mathfrak{p}_a]\subset\mathfrak{k}_a$

また，$\mathfrak{p}\perp\mathfrak{k}$，$Ada^{-1}(\mathfrak{p})\perp Ada^{-1}(\mathfrak{k})\Longrightarrow\mathfrak{p}_a\perp\mathfrak{k},\mathfrak{p}_a\perp Ada^{-1}(\mathfrak{k})\Longrightarrow\mathfrak{p}_a\perp\mathfrak{k}^a\Longrightarrow\mathfrak{p}_a\subset(\mathfrak{k}^a)^\perp$．逆に，$X\in(\mathfrak{k}^a)^\perp\Longrightarrow X\in\mathfrak{k}^\perp=\mathfrak{p}$ かつ $X\in(Ada^{-1}(\mathfrak{k}))^\perp=Ada^{-1}(\mathfrak{k}^\perp)=Ada^{-1}(\mathfrak{p})\Longrightarrow X\in\mathfrak{p}_a$．よって，

(3.4)　$\mathfrak{p}_a=(\mathfrak{k}^a)^\perp$，　即ち，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}^a\oplus\mathfrak{p}_a$　（直交分解）．

補題 3.5　$\mathfrak{k}^a=a^{-1}\cdot T_a(KaK),\quad\mathfrak{p}_a=a^{-1}\cdot T_a(KaK)^\perp$

［証明］　$T_a(Ka)=dR_a(T_eK)=\mathfrak{k}\cdot a$，$T_a(aK)=dL_a(T_eK)=a\cdot\mathfrak{k}\Longrightarrow T_a(KaK)$

$=\mathfrak{k}\cdot a+a\cdot\mathfrak{k}$ であるから，$a^{-1}\cdot T_a(KaK)=a^{-1}\cdot\mathfrak{k}\cdot a+\mathfrak{k}=\mathfrak{k}^a$．$a^{-1}\cdot$ の等長性より，$\mathfrak{p}_a=(\mathfrak{k}^a)^\perp=a^{-1}\cdot T_a(KaK)^\perp$． (終)

(2.2) と (3.2.3) から直ちに，

(3.6) K の随伴作用 $Ad: K\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ と $X\in\mathfrak{g}$ について，

$$T_X(K\cdot X)=adX(\mathfrak{k})$$

記号 $\mathfrak{g}_X=\{Y\in\mathfrak{g}\mid[X,Y]=0\}\quad(X\in\mathfrak{g})$

$\mathfrak{k}_X=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_X,\quad \mathfrak{p}_X=\mathfrak{p}\cap\mathfrak{g}_X$

Jacobi 恒等式から容易に，$[\mathfrak{g}_X,\mathfrak{g}_X]\subset\mathfrak{g}_X$．従って，

(3.7) $$[\mathfrak{k}_X,\mathfrak{k}_X]\subset\mathfrak{k}_X,\quad[\mathfrak{k}_X,\mathfrak{p}_X]\subset\mathfrak{p}_X,\quad[\mathfrak{p}_X,\mathfrak{p}_X]\subset\mathfrak{k}_X$$

補題 3.8 (1) $X\in\mathfrak{p}$ について，$\mathfrak{p}=adX(\mathfrak{k})\oplus\mathfrak{p}_X$ (直交分解)．

(2) $X\in\mathfrak{p}_a$，$a\in G$ について，$\mathfrak{p}_a=adX(\mathfrak{k}_a)\oplus(\mathfrak{p}_a\cap\mathfrak{g}_X)$ (直交分解)．

(3) $X\in\mathfrak{p}_A$，$A\in\mathfrak{g}$ について，$\mathfrak{p}_A=adX(\mathfrak{k}_A)\oplus(\mathfrak{p}_A\cap\mathfrak{g}_X)$ (直交分解)．

［証明］ (3.2.4) より，$Z\perp[X,Y]\Longleftrightarrow[X,Z]\perp Y$．$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{a}$ を考え，Y をその中で動かすことにより，

$$Z\in adX(\mathfrak{a})^\perp\Longleftrightarrow[X,Z]\in\mathfrak{a}^\perp.$$

$[\mathfrak{b},\mathfrak{b}]\subset\mathfrak{a}$, $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]\subset\mathfrak{b}$ をみたす部分空間 $\mathfrak{b}$ を考え，$X, W\in\mathfrak{b}$ とすると，$[X,W]\in\mathfrak{a}$ であるから，

$$Z\in adX(\mathfrak{a})^\perp\cap\mathfrak{b}\Longleftrightarrow Z\in\mathfrak{b}\text{ かつ }[X,Z]\in\mathfrak{a}^\perp\cap\mathfrak{a}=0\Longleftrightarrow Z\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_X$$

ここで，$adX(\mathfrak{a})\subset[\mathfrak{b},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{b}$ に注意すれば，

$$\mathfrak{b}=adX(\mathfrak{a})\oplus(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{g}_X)\quad(\text{直交分解})$$

(1), (2), (3) はそれぞれ，$(\mathfrak{a},\mathfrak{b})=(\mathfrak{k},\mathfrak{p})$，$(\mathfrak{k}_a,\mathfrak{p}_a)$，$(\mathfrak{k}_A,\mathfrak{p}_A)$ の場合に定理 3.1, (3.3), (3.7) を適用してえられる． (終)

$K\times K$ の左作用の変分完備性

対称対 (G,K) において，$K\times K$ の G への左作用 μ を

(3.9) $$\mu:(K\times K)\times G\to G\Longleftrightarrow\mu((a,b),x)=axb^{-1}$$

で定義する．G の不変 Riemann 計量は，この作用に関して $(K\times K)$-不変である．

この $K\times K$ の G への左作用が変分完備であることを証明しよう．

$a \in G$ を始点 $(a=g(0))$ とする任意の測地線 g は，$X \in \mathfrak{g}$ によって，$g(t)=ae^{tX}$ の形に一意的に表わされる(定理 2.13)．a の $(K\times K)$-軌道 は KaK であるから，補題 3.5 によって次がえられる：

(3.10)　G における a を始点とする $(K\times K)$-横断的測地線 $g: \boldsymbol{R}\to G$ は

$$g(t)=ae^{tX}, \quad X\in\mathfrak{p}_a$$

の形に一意的に表わされる．

補題 3.11　$\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}=\{\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$ をみたす，g に沿った $(K\times K)$-横断的 Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}\}$ は次の形のベクトル場から成る：

$$\boldsymbol{v}(t)=(ae^{tX})\cdot(Ade^{-tX}(Y)-Y+tZ)$$

ただし，Y, Z は $Y\in\mathfrak{k}_a$, $Z\in\mathfrak{p}_a\cap\mathfrak{g}_X$ を動く．

［証明］　$Y\in\mathfrak{k}_a$, $Z\in\mathfrak{p}_a\cap\mathfrak{g}_X$ に対して変分 $V=V^{(Y,Z)}$ を

$$V(t,\alpha)=V_\alpha(t)=ae^{\alpha Y}e^{t(X+\alpha Z)}e^{-\alpha Y}$$

で定義する．$t\mapsto e^{\alpha Y}e^{t(X+\alpha Z)}e^{-\alpha Y}$ は 1 助変数部分群であるから，V_α は a を始点とする測地線であり，V は $V_0=g$ の変分である．V_α の初期ベクトルは $\dot{V}_\alpha(0)=a\cdot Ade^{\alpha Y}(X+\alpha Z)$．$Y\in\mathfrak{k}_a=\mathfrak{k}\cap Ada^{-1}(\mathfrak{k})\Longrightarrow e^{\alpha Y}\in K\cap a^{-1}Ka$．$Ade^{\alpha Y}$ は $\mathfrak{g}$ の直交変換で $\mathfrak{k}\to\mathfrak{k}$, $Ada^{-1}(\mathfrak{k})\to Ada^{-1}(\mathfrak{k})$ と写すから $\mathfrak{p}=\mathfrak{k}^\perp\to\mathfrak{p}$, $Ada^{-1}(\mathfrak{p})=Ada^{-1}(\mathfrak{k})^\perp\to Ada^{-1}(\mathfrak{p})$．(3.4) によって，$Ade^{\alpha Y}(\mathfrak{p}_a)\subset\mathfrak{p}_a=(\mathfrak{k}^a)^\perp$．$X+\alpha Z\in\mathfrak{p}_a$, $V_\alpha(0)=a$ であるから，

$$\dot{V}_\alpha(0)\in a\cdot\mathfrak{p}_a=(a\cdot\mathfrak{k}^a)^\perp \Longrightarrow \dot{V}_\alpha(0)\perp KaK$$

即ち，V は $(K\times K)$-横断的 Jacobi ベクトル場 $\boldsymbol{v}$ を与える．

$Z\in\mathfrak{g}_X\Longrightarrow[Z,X]=0\Longrightarrow e^{t(X+\alpha Z)}=e^{tX}e^{t\alpha Z}$ であるから，

$$V_\alpha(t)=ae^{tX}((e^{-tX}e^{\alpha Y}e^{tX})e^{t\alpha Z}e^{-\alpha Y})$$

$$\boldsymbol{v}(t)=\partial_\alpha V_\alpha(t)=ae^{tX}\cdot(Ade^{-tX}(Y)+tZ-Y)$$

故に，$\boldsymbol{v}\in\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}$ である．

(1.7) の同型 $\theta:\Lambda_g(0)\cong T_aM$ において，$\boldsymbol{v}\in\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}$ を与える変分 V_α は $\dot{V}_\alpha(0)\perp KaK$ をみたすから，対応する T_aM の曲線 $h(\alpha)=\dot{V}_\alpha(0)$ は $T_a(KaK)^\perp=a\cdot\mathfrak{p}_a$ (補題 3.5) に接し，$\theta(\boldsymbol{v})=\dot{h}(0)\in a\cdot\mathfrak{p}_a$．即ち，

$$\theta(\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K})\subset a\cdot\mathfrak{p}_a$$

次に，$V_\alpha(t)=ae^{\alpha Y}e^{t(X+\alpha Z)}e^{-\alpha Y}$ より，$h(\alpha)=\dot{V}_\alpha(0)=a\cdot Ade^{\alpha Y}(X+\alpha Z)\Longrightarrow \dot{h}(0)=a\cdot([Y,X]+Z)$．補題 3.8(2) によって，対応 $(Y,Z)\mapsto\boldsymbol{v}\mapsto\theta(\boldsymbol{v})=a\cdot([Y,X]$

$+Z)$ は全射 $\mathfrak{k}_a \oplus (\mathfrak{p}_a \cap \mathfrak{g}_X) \to a\cdot\mathfrak{p}_a$ を与えているから,

$$\theta(\Lambda_g(0) \cap J_g^{K\times K}) \supset a\cdot\mathfrak{p}_a$$

故に, θ は同型 $\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K} \cong a\cdot\mathfrak{p}_a$ を与え, かつ $\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}$ は補題の形のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から成ることが示された.　(終)

補題 3.12　(1)　作用 $\mu: (G\times G)\times G \to G \Longleftrightarrow \mu((a, b), g) = agb^{-1}$ に関して, $(U, V) \in \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} = L(G\times G)$ で与えられる局所 $(G\times G)$-運動 $\dot{\mu}(U, V)$ は,

$$\dot{\mu}(U, V)(y) = U\cdot y - y\cdot V, \qquad y \in G$$

をみたす.

(2)　$a = g(0)$ で消える局所 $(K\times K)$-運動を g $(\Longleftrightarrow g(t) = ae^{tX})$ に制限したものは次の形のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から成る：

$$\boldsymbol{v}(t) = (ae^{tX})\cdot(Ade^{-tX}(V) - V), \quad V \in \mathfrak{k}_a = \mathfrak{k} \cap Ada^{-1}\mathfrak{k}$$

［証明］　(1)　$\dot{\mu}(U, V)$ は1助変数運動 $e^{\alpha U}\cdot y\cdot e^{-\alpha V}$ を α で微分してえられる.

$$e^{\alpha U}\cdot y\cdot e^{-\alpha V} = e^{\alpha U}\cdot y\cdot e^{-\alpha V}\cdot y^{-1} y = e^{\alpha U} e^{-\alpha Ad y V}\cdot y$$

より, $\dot{\mu}(U, V)(y) = (U - Ady(V))\cdot y = U\cdot y - y\cdot V\cdot y^{-1}\cdot y = U\cdot y - y\cdot V.$

(2)　(1) で, $U, V \in \mathfrak{k}$ とすれば局所 $(K\times K)$-運動がえられ, それが $a = g(0)$ で消えるための必要十分条件は, $U\cdot a - a\cdot V = 0$, 即ち, $V = Ada^{-1}(U) \in \mathfrak{k} \cap Ada^{-1}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_a$ である. このとき, $y = g(t) = ae^{tX}$ について,

$$\begin{aligned} U\cdot y - y\cdot V &= (Ada)V\cdot y - y\cdot V = y\cdot(Ady^{-1})(Ada)V - y\cdot V \\ &= y\cdot(Ad(y^{-1}a)V - V) = y\cdot(Ade^{-tX}(V) - V) \end{aligned}$$

(終)

定理 3.13　(G, K) を対称対とするとき, (3.9) で与えられる $K\times K$ の G への作用は変分完備である. 即ち, $\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}(1) = \{t=0$ で消え, $t=1$ で $g(1)$ の $(K\times K)$-軌道に接する, g に沿った $(K\times K)$-横断的 Jacobi ベクトル場$\}$ の元は局所 $(K\times K)$-運動で与えられる.

［証明］　後半を示す. そのとき, 補題 2.6 によって変分完備性がえられる.

$g(t) = ae^{tX}$, $g(1) = ae^X = b$ とおく. $\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}(1) \subset \Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}$ のベクトル場 $\boldsymbol{v}(t)$ を補題 3.11 の形に表わすとき, $b = g(1)$ で KbK に接するための条件は, 補題 3.5 により,

$$(*) \qquad b^{-1}\cdot\boldsymbol{v}(1) = Ade^{-X}(Y) - Y + Z \in \mathfrak{k}^b = \mathfrak{k} + Adb^{-1}(\mathfrak{k})$$

ここで，$Y\in\mathfrak{k}_a$，$Z\in\mathfrak{p}_a\cap\mathfrak{g}_X$，$Adb^{-1}=(Ade^{-X})(Ada^{-1})$ であるから，

$$b^{-1}\cdot\boldsymbol{v}(1)=B_1+Ade^{-X}(B_2),\quad B_1\in\mathfrak{k},\ B_2\in Ada^{-1}(\mathfrak{k})$$

と書くことができる．$B_1, B_2\in\mathfrak{k}+Ada^{-1}(\mathfrak{k})=\mathfrak{k}^a=(\mathfrak{p}_a)^\perp\Longrightarrow(Z, B_1)=(Z, B_2)=0.$
一方，$[X, Z]=0\Longrightarrow Ade^{-X}(Z)=Z$ を使って，

$$(Z, b^{-1}\cdot\boldsymbol{v}(1))=(Z, Ade^{-X}(B_2))=(Ade^{-X}(Z), Ade^{-X}(B_2))=(Z, B_2)=0$$

また，$\mathfrak{p}=\mathfrak{k}^\perp$ より，$(Z, Y)=0$ および $(Z, Ade^{-X}(Y))=(Ade^{-X}(Z), Ade^{-X}(Y))=(Z, Y)=0.$ (✱)を使って，

$$0=(Z, b^{-1}\cdot\boldsymbol{v}(1))=(Z, Ade^{-X}(Y)-Y+Z)=(Z, Z)\Longrightarrow Z=0$$

従って，$\boldsymbol{v}(t)=(ae^{tX})\cdot(Ade^{-tX}(Y)-Y)$，$Y\in\mathfrak{k}_a$. 補題 3.12 によって，$\boldsymbol{v}(t)$ は局所 $(K\times K)$-運動で与えられる． (終)

K の $\mathfrak{p}$ への随伴作用の変分完備性

K の随伴作用 $Adx:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ $(x\in K)$ は直交変換で，$Adx(\mathfrak{k})\subset\mathfrak{k}$ であるから，$\mathfrak{p}=\mathfrak{k}^\perp\cong T_{\pi(e)}(G/K)$ についても $Adx(\mathfrak{p})\subset\mathfrak{p}$ である．

次に，随伴作用

$$\mu=Ad: K\times\mathfrak{p}\longrightarrow\mathfrak{p}$$

が変分完備であることを証明しよう．

$\mathfrak{p}$ はユークリッド空間と同じ構造をもつから，その中の測地線は直線で

$$g(t)=A+tX\quad (A, X\in\mathfrak{p})$$

の形に一意的に表わされる．

$A\in\mathfrak{p}$ の K-軌道 $AdK(A)$ の A における接空間は，曲線 $Ade^{tX}(A)$, $X\in\mathfrak{k}$, の接ベクトル $\dfrac{d}{dt}(Ade^{tX}(A))|_{t=0}=[X, A]=adX(A)$ で張られる．(3.2.4)によって，$Y\perp[X, A]\Longleftrightarrow X\perp[Y, A]$. 故に $Y\in ad\mathfrak{k}(A)^\perp\Longleftrightarrow[Y, A]\in\mathfrak{k}^\perp=\mathfrak{p}$. 一方，$Y, A\in\mathfrak{p}\Longrightarrow[Y, A]\in[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]=\mathfrak{k}$. これらのことから，

$$T_A(AdK(A))=ad\mathfrak{k}(A) \tag{3.14}$$

$$T_A(AdK(A))^\perp=\mathfrak{p}_A\ (\mathfrak{p}\text{ における直交補空間}).$$

補題 3.15 上の場合，$\Lambda_g(0)\cap J_g{}^K=\{\boldsymbol{v}(0)=\boldsymbol{0}$ をみたす g に沿った K-横断的 Jacobi ベクトル場$\}$ は次の形のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ から成る $(X\in\mathfrak{p}_A)$：

$$\boldsymbol{v}(t)=t([X, Y]+Z),\quad Y\in\mathfrak{k}_A,\ Z\in\mathfrak{p}_A\cap\mathfrak{g}_X$$

［証明］ (3.14)により，A を始点とする K-横断的測地線は

$$g(t)=A+tX, \quad X\in\mathfrak{p}_A$$

の形に一意的に表わされる．$A=g(0)$ で消える K-横断的 Jacobi ベクトル場は(線型)変分

$$V_\alpha(t)=A+t(X+\alpha W), \quad W\in\mathfrak{p}_A$$

で与えられる．故に，$\boldsymbol{v}(t)=tW$ の形である．補題 3.8(3) の分解を使って補題がえられる． (終)

補題 3.16 A で消える局所 K-運動を $g(t)=A+tX$ $(X\in\mathfrak{p}_A)$ に制限したものは，$\boldsymbol{v}(t)=t[V, X]$ $(V\in\mathfrak{k}_A)$ の形である．

［証明］ 1助変数部分群 $e^{\alpha V}$ $(V\in\mathfrak{k})$ の作用で与えられる $\mathfrak{p}$ の局所 K-運動は，(3.2.3) によって，$S\in\mathfrak{p}$ に $[V, S]\in[\mathfrak{k},\mathfrak{p}]\subset\mathfrak{p}$ を対応させる．$g(t)$ に制限して，$\boldsymbol{v}(t)=[V, A+tX]$．$A$ で消えるためには，$\boldsymbol{v}(0)=0\Longleftrightarrow[V, A]=0\Longleftrightarrow V\in\mathfrak{g}_A\cap\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_A$．従って，$\boldsymbol{v}(t)=t[V, X]$ $(V\in\mathfrak{k}_A)$． (終)

定理 3.17 K の $\mathfrak{p}$ への随伴作用は変分完備である．即ち，$\Lambda_g(0)\cap J_g{}^K(1)=$ {$t=0$ で消え $t=1$ で $g(1)$ の K-軌道に接する，g に沿った K-横断的ベクトル場} の元は局所 K-運動の g への制限で与えられる．

［証明］ 補題 3.15 で与えられる $\boldsymbol{v}(t)$ が $t=1$ で K-軌道に接するためには，(3.14) により，$[X, Y]+Z\in ad\mathfrak{k}(A+X)$，$X\in\mathfrak{p}_A$，$Y\in\mathfrak{k}_A$，$Z\in\mathfrak{p}_A\cap\mathfrak{g}_X$．

$$X\in\mathfrak{p}_A,\quad Y\in\mathfrak{k}_A \Longrightarrow [X, Y]=[A+X, Y]\in ad\mathfrak{k}(A+X)$$

故に，$Z\in ad\mathfrak{k}(A+X)$．

一方，$Z\in\mathfrak{p}_A\cap\mathfrak{g}_X\Longrightarrow[A, Z]=[X, Z]=0$．任意の $D\in\mathfrak{k}$ について，

$$([D, A+X], Z)=-([A+X, D], Z)=(D, [A, Z])+(D, [X, Z])=0$$

であるから，$Z\perp ad\mathfrak{k}(A+X)$．故に，$Z=0\Longrightarrow\boldsymbol{v}(t)=t[X, Y]=t[-Y, X]$．補題 3.16 により，$\boldsymbol{v}(t)$ は局所 K-運動で与えられる． (終)

K の G/K への作用と随伴作用の変分完備性

K の G/K への作用(左移動)

$$\mu: K\times(G/K)\longrightarrow G/K \Longleftrightarrow \mu(x, yK)=xyK$$

を考える．

定理 3.18 対称対 (G, K) において，K の対称空間 G/K への作用は変分完備である．

［証明］ 射影 $\pi : G\to G/K$ と $d\pi : TG\to T(G/K)$ を考える．

$a\in G$，$b=\pi(a)\in G/K$ とする．a の $(K\times K)$-軌道 KaK は π によって b の K-軌道 $K\cdot b$ の上へ写され，$T_a(KaK)$ の直交補空間 $a\cdot\mathfrak{p}_a$ は $d\pi_a$ によって $T_b(K\cdot b)$ の直交補空間の上へ同型に写される．しかし，補題 2.14 を考えれば同型 $a\cdot\mathfrak{p}_a\cong T_b(K\cdot b)^{\perp}$ は等長的である．また，定理 2.15 によって，a を始点とする G における $(K\times K)$-横断的測地線 g と，b を始点とする G/K における K-横断的測地線とは π を通じて 1 対 1 に対応する．横断的な変分および Jacobi ベクトル場でも同様であり，$a'\in G$ の $(K\times K)$-軌道に接する Jacobi ベクトル場は $d\pi$ を通じて，$b'=\pi(a')$ の K-軌道に接する Jacobi ベクトル場と対応している．以上のことから，$d\pi$ は次の同型を誘導する：

$$\Lambda_g(0)\cap J_g^{K\times K}(1)\cong\Lambda_{\pi\circ g}(0)\cap J_{\pi\circ g}^{K}(1)$$

$p_1 : K\times K\to K$ を第 1 因子への射影とするとき，右の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc} (K\times K)\times G & \xrightarrow{\ \mu\ } & G \\ \big\downarrow{\scriptstyle p_1\times\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ K\times(G/K) & \xrightarrow{\ \mu\ } & G/K \end{array}$$

従って，$(X_1, X_2)\in\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{k}$ による局所$(K\times K)$-運動は射影によって $X_1\in\mathfrak{k}$ による局所K-運動へ写される．以上のことから，$K\times K$ の G への作用の変分完備性は K の G/K への作用の変分完備性を導くことがわかる．　　(終)

定理 3.19　G の内部自己同型による G への(随伴)作用

$$A : G\times G\longrightarrow G \Longleftrightarrow A(x, y)=xyx^{-1}$$

および，G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ への随伴作用

$$Ad : G\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$$

はともに変分完備である．

［証明］ $d : G\to G\times G$ を対角写像とするとき，$(G\times G,\ d(G))$ は $\sigma(x, y)=(y, x)$ によって対称対である．対応 $(x, y)\mapsto xy^{-1}$ によって，同型対応 $(G\times G)/d(G)\cong G$ がえられ，$d(G)\cong G$ の $(G\times G)/d(G)$ への作用は内部自己同型と同値である．また，$\mathfrak{k}=L(d(G))$ の直交補空間は $\{(X, -X)\mid X\in\mathfrak{g}\}$ で与えられ，$X\mapsto(X, -X)$ によってこれを $\mathfrak{g}$ と同一視するとき，G の $\mathfrak{g}$ への作用は随伴作用と一致する．故に定理は定理 3.18 と定理 3.17 より出る．　　(終)

§4 コンパクト Lie 群と対称空間への応用

随伴作用に関する軌道と安定化群

定理 3.19 によって，G の随伴作用

$$A: G\times G\longrightarrow G, \qquad Ad: G\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}=L(G)$$

は変分完備である．これらの作用に関する G-軌道と安定化群を考えよう．

記号 $G(y)=A(G\times y)=\{gyg^{-1}\,|\,y\in G\}$: A に関する y の G-軌道

補題 4.1 (1) $T_y(G(y))=\{X\cdot y-y\cdot X\,|\,X\in\mathfrak{g}\}$

(2) $T_y(Z(y))=\{y\cdot Z\,|\,Z\cdot y=y\cdot Z,\ Z\in\mathfrak{g}\}=\{y\cdot Z\,|\,Ady(Z)=Z\in\mathfrak{g}\}$

(3) $T_y(G)=T_y(Z(y))\oplus T_y(G(y))$ (直交分解)

(4) $\dim G=\dim Z(y)+\dim G(y)$

［証明］ (1) (2.2)により，$T_y(G(y))$ のベクトルは局所 G-運動で与えられる．補題 3.12(1)において，$U=V=X$ とおけば(1)がえられる．

(2) $y\cdot Z(y)=Z(y)$ であるから，$T_e(Z(y))=L(Z(y))=\{Z\in\mathfrak{g}\,|\,Ady(Z)=Z\}$ をいえばよい．$Z\in L(Z(y))\Longleftrightarrow ye^{tZ}y^{-1}=e^{tZ}\Longleftrightarrow e^{Ady(tZ)}=e^{tZ}\Longleftrightarrow Ady(Z)=Z$.

(3) $Y\in\mathfrak{g}$ について，$y\cdot Y\perp G(y)\Longleftrightarrow(y\cdot Y,X\cdot y-y\cdot X)=0$ $(\forall X\in\mathfrak{g})$．$y\cdot$ は直交変換であるから，これは $(Y,Ady^{-1}(X)-X)=0\Longleftrightarrow(Y,Ady^{-1}(X))=(Y,X)$ と同値．(3.2.2)により，これは $(Ady(Y),X)=(Y,X)$ と同値．$X\in\mathfrak{g}$ は任意であるから，$AdyY=Y\Longleftrightarrow Y\in T_y(Z(y))$ と同値．故に，$T_y(G(y))^{\perp}=T_y(Z(y))$ がえられ，(3)をうる． (4)は(3)から明らか． (終)

作用 A についての安定化群と G における中心化群は一致する：

(4.2) $$G_y=Z(y)=\{g\in G\,|\,gy=yg\}$$

$\mathfrak{g}$ への作用 Ad についても，$B\in\mathfrak{g}$ に対して同様な性質がえられる．

補題 4.3 (1) $T_B(Ad(G)\cdot B)=\{B+[X,B]\ |\ X\in\mathfrak{g}\}$

(2) $T_B(Ad(G)\cdot B)$ の直交補空間は $\mathfrak{g}_B=\{Z\in\mathfrak{g}\ |\ [Z,B]=0\}$ である．

［証明］ (1) $T_B(Ad(G)\cdot B)$ のベクトルは $Ad(e^{tX})B$ の初期ベクトルとして与えられる．従って，(1)は(3.2.3)より直ちにえられる．

(2) $T_B(Ad(G)\cdot B)^{\perp}=\{B+Y\ |\ (Y,[X,B])=0,\ X\in\mathfrak{g}\}$．(3.2.4)より，$0=(Y,[X,B])=-(Y,[B,X])=([Y,B],X)$．$X$ は任意だから，これは $[Y,B]=0$，即ち $Y\in\mathfrak{g}_B$ と同値．$B\in\mathfrak{g}_B$ だから，$T_B(Ad(G)\cdot B)^{\perp}=B+\mathfrak{g}_B=\mathfrak{g}_B$. (終)

ここで，第5章の§3以下のコンパクト連結 Lie 群 G に関する結果のうち，以下でよく使われるものをまとめる．(　)内は対応する第5章の結果を示す．

(4.4.1) G の各元は少くとも1つの極大トーラス上にある．(定理 3.15)

(4.4.2) G の任意の2つの極大トーラスは互いに共役である．(系 3.16)

(4.4.3) $\exp : \mathfrak{g}=L(G)\longrightarrow G$ は全射．(系 3.17)

(4.4.4) $x\in G$ の中心化群の単位元成分は $Z(x)_0=\cup(x$ を含む極大トーラス$)$．(補題 4.12)

(4.4.5) $g\in G$ と $t, t'\in T$ (極大トーラス)について，$t'=gtg^{-1}$ ならば，$t'=ntn^{-1}$ となる $n\in N(T)$ が存在する．(定理 3.18)

(4.4.6) G の任意のトーラス T' について，その中心化群は $Z(T')=\cup(T'$ を含む極大トーラス$)$ をみたし，従って $Z(T')$ は連結である．(系 3.20，定理 3.22)

(4.5.1) $x\in G$ は正則元($\dim Z(x)$ は最小で $\operatorname{rank} G$ に等しい)$\Longleftrightarrow x$ を含む極大トーラスは唯1つである．(定理 4.13)

随伴表現 Ad の極大トーラス T への制限は，直交分解 $L(G)=L(T)\oplus\sum_{r=1}^{m}V_r$ $(\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{m})$ と root

$$\theta_r : L(T)\longrightarrow \boldsymbol{R} \quad \text{または} \quad \bar{\theta}_r : T\longrightarrow \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z} \qquad (r=1, 2, \cdots, m)$$

を与え，T の閉部分群 $U_r=\bar{\theta}_r^{-1}(0)$ とその Lie 環 $L(U_r)=\theta_r^{-1}(0)$ が定義される．

(4.5.2) $x\in T$ が丁度 f 個の U_r 上にあるとき，

$$\dim Z(x)=l+2f \qquad (l=\dim T=\operatorname{rank} G) \qquad (\text{定理 } 4.15)$$

(4.5.2)′ 従って，$\{T$ の正則元$\}=T-\bigcup_{r=1}^{m}U_r$.

(4.5.3) $Z(G)=\bigcap_{r=1}^{m}U_r=\operatorname{Ker}(Ad\,|\,T)=\operatorname{Ker} Ad$ (定理 4.18)

(4.6.1) Weyl 群 $W(G)=N(T)/T$ は $L(T)$ に作用して，root $\{\theta_r\}$ の置換をひきおこす．従って，局所図式 $D'(G)=\bigcup_{r=1}^{m}L(U_r)$ および Stiefel 図式 $D(G)=\bigcup_{r=1}^{m}\theta_r^{-1}(\boldsymbol{Z})$ を保つ直交変換をひきおこす．(定理 4.21)

(4.6.2) Weyl 群 $W(G)$ は Weyl 領域 ($D'(G)$ の成分)に単純推移的に作用する．(定理 4.30)

定理 4.7 $Ad : G\times\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ に関する $X\in\mathfrak{g}$ の安定化群 G_X は連結で，

$$G_X=\exp(\mathfrak{g}_X)=Z(T')$$

で与えられる．ただし，T' は $\{\exp\alpha X \mid \alpha\in\boldsymbol{R}\}$ の閉包としてえられるトーラス．

［証明］ G_X の単位元成分 $(G_X)_0$ の元は $y=e^Y$，$Y\in L(G_X)$，と書ける．$e^{tY}\in(G_X)_0$ であるから，$Ad\,e^{tY}X=X$．(3.2.3)によって，$[Y,X]=0 \Longleftrightarrow Y\in\mathfrak{g}_X$．逆に，$[Y,X]=0\Longrightarrow e^{tY}e^Xe^{-tY}=e^X$（第5章補題5.22）$\Longrightarrow Ad\,e^{tY}X=X\Longrightarrow e^{tY}\in(G_X)_0$．故に，$(G_X)_0=\exp(\mathfrak{g}_X)$．次に，$y\in G_X\Longleftrightarrow Ad\,y(tX)=tX$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})$ $\Longleftrightarrow ye^{tX}y^{-1}=e^{tX}$ $(\forall t\in\boldsymbol{R})\Longleftrightarrow y\in Z(T')$．即ち $G_X=Z(T')$．(4.4.6)より，$Z(T')=Z(T')_0$． （終）

補題 4.8 $X\in\mathfrak{t}=L(T)$ とする．X を含む局所図式 $D'(G)$ の超平面 $L(U_r)$ の個数を f とするとき，$\dim G_X=l+2f$ である．

［証明］ 前定理により，$\dim G_X=\dim\mathfrak{g}_X=\dim Z(T')$．$\alpha>0$ について，$G_X=G_{\alpha X}$ である．α を十分小さくとれば，αX を含む Stiefel 図式の超平面は局所図式の超平面のみとなる．故に，$y=\exp(\alpha X)\in T'$ は丁度 f 個の $U_r=\exp(L(U_r))$ に含まれ，(4.5.2)により $\dim Z(y)=l+2f$．T' の生成元は稠密にあるから，y は T' の生成元としてよい．従って，$Z(y)=Z(T')\Longrightarrow\dim G_X=\dim Z(y)=l+2f$． （終）

注意 4.8′ $A:G\times G\to G$ に関する $x\in G$ の安定化群 G_x の次元は，$\exp X=x$ をみたす $X\in L(T)$ を通る Stiefel 図式 $D(G)$ の超平面の数を f とするとき，$\dim G_x=l+2f$ で与えられることは(4.5.2)から明らかである．

随伴作用に関する横断的測地線

$G \bmod N$，$N=G(p)$，の測地線分の集合 $(r\notin N)$

$$S(G,N,r)$$

において，終点 r は最大次元の G-軌道 $G(r)$ の上にあるとする．このとき，補題4.1(4)によって，$Z(r)$ の次元は最小である．(4.5.1)，(4.5.2)によって，

(4.9) r が最大次元の軌道上にあるとき，$T=Z(r)$ は極大トーラスである．

$S(T,N\cap T,r)$ は単に $N\cap T$ の点と r を結ぶ測地線分の集合とする．

補題 4.10 $$S(G,N,r)=S(T,N\cap T,r)$$

［証明］ $S(G,N,r)$ の測地線分 $s=g\mid[0,1]$ について，$\dot g(1)\perp G(r)\Longrightarrow\dot g(1)$

$\in T_r(G(r))^\perp$. 補題 4.1 (3) によって, $\dot{g}(1)\in T_r(Z(r))=T_r(T)$. 即ち, g は r で T に接する. g は $g(1+t)=re^{tX}$, $X\in\mathfrak{g}$, と書け, $\dot{g}(1)=r\cdot X\in T_r(T)=r\cdot L(T)$ だから, $X\in L(T)\Longrightarrow g$ は T の中の測地線. よって, $S(G, N, r)\subset S(T, N\cap T, r)$.

逆に, $s=g|[0,1]\in S(T, N\cap T, r)$ について, $g(0)\in N\cap T$ の G-軌道は N である. $x=g(t)\in T$ について, (4.4.4) より $T\subset Z(x)$. 補題 4.1 (3) によって, $\dot{g}(t)\in T_x(T)\subset T_x(Z(x))$ は $G(x)$ と直交する. 従って, g は G-横断的で, 特に $G \bmod N$ の測地線である. 明らかに, $\dot{g}(0)$ は $N=G(p)$ に接するから, $s\in S(G, N, r)$. よって, $S(T, N\cap T, r)=S(G, N, r)$.　(終)

上の証明において, N と T はそれらの各交点で直交しているから, T において, $N\cap T$ は離散的である. T はコンパクトであるから, 次のことがわかる:

(4.10)′　$N\cap T$ は有限個の点から成る.

$S(T, N\cap T, r)$ を実際に調べるには, T の普遍被覆空間である

$$\mathfrak{t}=L(T)\quad(\xrightarrow{\exp}T)$$

で考えるのが便利である.

記号　$\tilde{N}=(\exp$ による $N\cap T$ のリフト$)$,

　　即ち, $\exp|\tilde{N}:\tilde{N}\longrightarrow N\cap T$ は全単射.

$R=\exp^{-1}(r)$

$S(\mathfrak{t}, \tilde{N}, R)=\{s:[0,1]\longrightarrow\mathfrak{t}$ (測地)線分 $|\ s(0)\in\tilde{N},\ s(1)\in R\}$

定理 4.11　$\exp:\mathfrak{t}\longrightarrow T\subset G$ は次の 1 対 1 対応を与える:

$$S(\mathfrak{t}, \tilde{N}, R)\longleftrightarrow S(G, N, r)$$

ただし, $T=Z(r)$, $r\notin N=G(p)$, $R=\exp^{-1}(r)$, $\tilde{N}$ は $N\cap T$ のリフトである.

[証明]　被覆空間において, 道のリフトは始点を指定すれば一意的に存在することから, $\exp$ は $S(\mathfrak{t}, \tilde{N}, R)$ から $S(T, N\cap T, r)$ への 1 対 1 対応を与える. よって, 補題 4.10 より定理がえられる.　(終)

次に, $\mathfrak{g}=L(G)$ の上の随伴作用 Ad について考える.

補題 4.3 (2) によって, $R\in\mathfrak{g}$ の軌道の次元が最大$\Longleftrightarrow\mathfrak{g}_R$ の次元が最小. $\exp R$ が極大トーラス T 上にあるとすると, 明らかに $\mathfrak{g}_R\supset\mathfrak{t}=L(T)$. 補題 4.8 を使えば容易に, $\mathfrak{g}_R=\mathfrak{t}$ と $R\in\mathfrak{t}-D'(G)$ は同値であることがわかる. よって,

(4.12)　$R(\in \mathfrak{t})$ の軌道の次元が最大$\Longleftrightarrow R\in\mathfrak{t}-D'(G)\Longleftrightarrow \mathfrak{g}_R=\mathfrak{t}\Longleftrightarrow T_R(Ad(G)\cdot R)=\mathfrak{t}^\perp=R+\mathfrak{m}$. 一般の $R\in\mathfrak{t}$ については，$\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}_R$.

$\mathfrak{g} \bmod N$，$N=Ad(G)\cdot P=G(P)$，の(測地)線分の集合 $(R\notin N)$

$$S(\mathfrak{g}, N, R)$$

において，$R\in\mathfrak{t}=L(T)$（従って R は最大次元の軌道上にある）とする．

$S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)$ は単に $N\cap\mathfrak{t}$ の点と R を結ぶ(測地)線分の集合とする．

定理 4.13　上のような $N, R, \mathfrak{t}$ について，

$$S(\mathfrak{g}, N, R)=S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)$$

［証明］　$S(\mathfrak{g}, N, R)$ の線分 s は $s(1)=R$ において $T_R(Ad(G)\cdot R)=\mathfrak{t}^\perp$ と直交するから，s は $\mathfrak{t}$ に含まれ，$S(\mathfrak{g}, N, R)\subset S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)$.

逆に，$S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)$ の線分 s の上の点 $X=s(t)$ について，$\dot{s}(t)\in\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}_X=(Ad(G)\cdot X)^\perp$ であるから，s は G-横断的で，特に $\mathfrak{g} \bmod N$ の測地線分である．よって，$S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)\subset S(\mathfrak{g}, N, R)$.　　　　(終)

コンパクト Lie 群上の道の空間のホモロジー

道の空間 $\Omega(G, N)$ のホモロジーは Morse 級数 $\mathcal{M}(G, N, r; t)$ で規定される．この Morse 級数は $S(G, N, r)$ の測地線分の指数で定まる．

補題 4.14　$s\in S(T, N\cap T, r)=S(G, N, r)$ の指数 λ_s は偶数で，

$$\frac{1}{2}\lambda_s=\sum_{i=1}^{m} \#\{U_i\cap s(\mathrm{Int}\, I)\},\quad \mathrm{Int}\, I=(0, 1)$$

［証明］　定理 2.12 の式 $\lambda_s=\sum_{0<t<1}\delta(s(t))$ を考える．G の随伴作用 A による $x\in G$ の安定化群 G_x は，(4.2)により $G_x=Z(x)$ である．また，$Z(r)=T$ に注意すれば，(2.11) の δ と (4.5.2)の整数 f について，

$$\delta(s(t))=\dim Z(x)-\dim T=l+2f-l=2f$$

補題はこれと定理 2.12 から直ちにえられる．　　　　(終)

定理 4.15　G をコンパクト 1-連結 Lie 群，G の 1 点 p について，$N=G(p)=\{xpx^{-1}|x\in G\}$ とするとき，道の空間 $\Omega(G, N)$ のホモロジー群は次で定められる：

(1)　$H_{2j-1}(\Omega(G, N))=0$

(2)　$H_{2j}(\Omega(G, N))$ は有限生成自由アーベル群.

(3)　$P(\Omega(G, N), t)=\sum t^{2\nu(s)}\quad (s\in S(\mathfrak{t}, \tilde{N}, R))$

ただし，指数写像 $\exp:\mathfrak{t}\longrightarrow T$ (G の極大トーラス) と N に含まれない T の正則点 r について，$R=\exp^{-1}(r)$, $\tilde{N}$ は $N\cap T$ の $\mathfrak{t}$ への1つのリフト，$S(\mathfrak{t},\tilde{N},R)=\{\tilde{N}$ と R を結ぶ $\mathfrak{t}$ 内の線分 $s\}$ および G の Stiefel 図式 $D(G)=\bigcup_{i,n}L_{i,n}$, $L_{i,n}=\theta_i^{-1}(n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$, について，

$$\nu(s)=\#\{\text{線分 } s \text{ が横切る } D(G) \text{ の超平面 } L_{i,n}\}$$

［証明］ 補題4.10を定理1.21に適用すればよい．$\nu(s)$ を求めるには補題4.14と $\exp^{-1}(U_i)=L_i=\bigcup_n L_{i,n}$ を使えばよい．　(終)

定理 4.16　1-連結コンパクト Lie 群 G の閉道空間 ΩG について，

$$H_{2j-1}(\Omega G)=0,\quad H_{2j}(\Omega G) \text{ は自由アーベル群},$$
$$P(\Omega G,t)=\sum_{\varDelta}t^{2\nu(\varDelta)}$$

ここで，$\varDelta$ は基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ に含まれる Weyl 胞体を動き，$\nu(\varDelta)=\#\{$原点と $\varDelta$ の(内)点を結ぶ線分 s と交わる Stiefel 図式 $D(G)$ の超平面 $L_{i,n}\}$.

［証明］ 定理4.15において $p=e$ とすれば $N=\{e\}$ である．従って，H_{2j-1}, H_{2j} の結果は明らかである．$\tilde{N}$ は原点 $\mathbf{0}$ にとる．(4.6.2) より，Weyl 群 $W(G)$ は Weyl 領域の単純推移的置換をひきおこすから，各 $s\in S(\mathfrak{t},\mathbf{0},R)$ に対して $\varphi\in W(G)$ で $\varphi(s)\subset\mathscr{F}$ となるものがある．φ は $D(G)$ の超平面を置換する合同変換である(第5章定理5.1)から，s を $\varphi\circ s$ でおきかえてよい．$\varphi\circ s$ の終点$\in R$ は $\mathscr{F}$ に含まれる Weyl 胞体 $\varDelta$ の内点(正則点)である．各 $\varDelta\subset\mathscr{F}$ の中に丁度1個の R の点があることは，第5章の定理5.1，定理5.8(4)および定理5.19の $\Gamma/\Gamma_0=\pi_1(G)=0$ ($\Gamma=\exp^{-1}(e)$) からわかる．更に，$\nu(\varDelta)$ は $\varDelta$ の内点のとり方に無関係であることも容易にわかり，$\nu(s)=\nu(\varDelta)$ をうる．　(終)

定理 4.17　G をコンパクト連結 Lie 群とするとき次が成り立つ：

(1)　$\pi_2(G)=0$

(2)　$\pi_3(G)$ は自由アーベル群で，その生成元の個数は G の単純因子の個数に等しい．特に，G が単純ならば　$\pi_3(G)\cong\boldsymbol{Z}$.

［証明］ 被覆群 $(\tilde{G},p,G)$ において，$\pi_i(\tilde{G})\cong\pi_i(G)$ $(i>1)$ である．第5章系5.31によって，$\tilde{G}$ としてトーラス T といくつかの1-連結単純 Lie 群との直積がとれる．$\pi_i(T)=0$ $(i>1)$ であるから，定理は G が1-連結単純 Lie 群の場合に示せばよい．定理4.16と Hurewicz の定理によって，$\pi_2(G)\cong\pi_1(\Omega G)\cong H_1(\Omega G)=0$, $\pi_3(G)\cong\pi_2(\Omega G)\cong H_2(\Omega G)$は自由アーベル群でその生成元の個数は，

基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ の Weyl 胞体 $\varDelta$ でその点と原点とを結ぶ線分が $D(G)$ の唯1つの超平面と交わる $\varDelta$ の個数である． 原点を出る $\mathscr{F}$ 内の半直線が，まず基本 Weyl 胞体 $\varDelta_0$ を通り，初めて交わる超平面は $\tilde{\alpha}=1$ ($\tilde{\alpha}$: dominant root) で，$\mathscr{F}$ 内で $\tilde{\alpha}=1$ に面をもつ Weyl 胞体は $\varDelta_0$ とそれを $\tilde{\alpha}=1$ で折り返した $\varDelta$ の2つしかない．このことから生成元の個数は1で $\pi_3(G)\cong \boldsymbol{Z}$ をうる． （終）

系 4.18 1-連結単純 Lie 群 G について，$\pi_2(\Omega G)\cong H_2(\Omega G)\cong H^2(\Omega G)\cong \boldsymbol{Z}$.

$G/Z(T')$ のホモロジー

T' は G のトーラス，T は T' を含む極大トーラス，$\mathfrak{t}=L(T)\subset\mathfrak{g}=L(G)$ とする．

補題 4.19 $X\in\mathfrak{t}$ を $\exp X$ が T' の生成元であるような点，$N=Ad(G)\cdot X$ を X の軌道とするとき，

(1) N は $G/Z(T')$ に同相，かつ $\Omega(\mathfrak{g}, N)$ とホモトピー同値である．

(2) X を十分原点に近い点に選べば，$\mathfrak{t}\cap N$ は X の Weyl 群 $W(G)$ による軌道 $W(G)\cdot X$ と一致する．

［証明］ (1) 定理 4.7 によって，X の安定化群 $G_X=Z(T')$. 故に，

$$N=Ad(G)\cdot X\cong G/G_X=G/Z(T')$$

後半は $\mathfrak{g}$ が可縮であるときに一般に成り立つことである．

(2) $\varphi=[n]\in W(G)=N(T)/T$ の $\mathfrak{t}$ への作用は Adn で与えられるから，$W(G)\cdot X\subset\mathfrak{t}\cap N$ である．逆の包含関係を示すために，$Y\in\mathfrak{t}\cap N$ とすると，ある $g\in G$ があって，$Adg(X)=Y$. $x=\exp X$, $y=\exp Y$ とすれば，$x, y\in T$ かつ $gxg^{-1}=y$. (4.4.5)によって，$nxn^{-1}=y$ となる $n\in N(T)$ が存在する．$Adn(X)=Y'$ とおけば，$\exp Y'=\exp(Adn(X))=nxn^{-1}=gxg^{-1}=\exp(Adg(X))=\exp Y$. 故に $Y-Y'\in\Gamma=\exp^{-1}(e)$. Adg, Adn は $\mathfrak{g}$ の直交変換で，X を十分原点に近くとれば，$Y-Y'$ も原点に近くなるから，$Y-Y'=0$ となり，$Y=Y'=Adn(X)\in W(G)\cdot X$. よって，$\mathfrak{t}\cap N\subset W(G)\cdot X$ が示された． （終）

定理 4.20 T' をコンパクト連結 Lie 群 G のトーラスとするとき，

(1) $H_{2j-1}(G/Z(T'))=0$

(2) $H_*(G/Z(T'))$ は有限生成自由アーベル群.

(3) $P(G/Z(T'),t)=\sum t^{2\nu(Q)}$ $(Q\in W(G)\cdot X)$

ただし，X は $\exp X$ が T' を生成する $\mathfrak{t}=L(T)$ の点，$\nu(Q)$ は 1 つの Weyl 領域 $\mathscr{F}$ $(\subset L(T)-D'(G))$ 内の点 R を固定して，次のように与えられる：

$\nu(Q)=\#\{Q$ と R を結ぶ線分 s の内点で交わる局所図式 $D'(G)$ の超平面$\}$

［証明］ 補題 4.19 によって，$G/Z(T')$ は $\Omega(\mathfrak{g}, N)$, $N=Ad(G)\cdot X$, でおきかえてよく，X を十分原点に近く選ぶことにすれば，$N\cap\mathfrak{t}=W(G)\cdot X$ である．定理 1.21 と定理 4.13 によって，$S(\mathfrak{t}, N\cap\mathfrak{t}, R)$ の線分 s とその始点 $Q\in W(G)\cdot X$ について，s の指数 $\lambda_s=\sum_{0<t<1}\delta(s(t))$ が偶数で，次の式をみたすことを示せばよい：

$$\lambda_s=2\nu(Q) \tag{4.20$'$}$$

補題 4.8 と (2.11) によって，$Y\in\mathfrak{t}$ について，

$$\delta(Y)=\dim G_Y-\dim G_R=l+2f-l=2f$$

ただし，f は Y を通る $D'(G)$ の超平面の個数であり，この数を $Y\in s((0,1))$ で集めると (4.20)$'$ の式がえられる．　(終)

定理 4.21　G をコンパクト連結 Lie 群，T を G の極大トーラスとするとき，

(1)　$H_{2j-1}(G/T)=H^{2j-1}(G/T)=0$

(2)　$H_*(G/T)\cong H^*(G/T)$ は自由アーベル群で，その階数は Weyl 群 $W(G)$ の位数と一致する．

［証明］ T が極大トーラスであるから，$Z(T)=T$. 定理 4.20 において，X は 1 つの Weyl 胞体の点にとれる．(4.6.2) によって，X の軌道 $W(G)\cdot X$ の個数は $|W(G)|$ に等しい．従って，定理は定理 4.20 より容易にえられる．(終)

対称対に関する横断的測地線と不足指数

対称対 (G, K) を定める G の自己同型 σ による Lie 環の分解 $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$ を考える．G の極大トーラス T の Lie 環 $\mathfrak{t}=L(T)$ を Cartan 部分環というように，

定義　$\mathfrak{p}$ における極大な可換部分 Lie 環 $\mathfrak{s}$ を (G, K) の **Cartan 部分環**という．

$S=\exp(\mathfrak{s})$ とおけば，S を含む極大トーラス T の Lie 環 $\mathfrak{t}=L(T)$ について，

(4.22)　$\mathfrak{s}=\{X\in\mathfrak{t}\,|\,\sigma(X)=-X\}=\mathfrak{t}\cap\mathfrak{p}$ が成り立ち，S は G のトーラスで $\{x\in T\ |\ \sigma(x)=x^{-1}\}$ の単位元成分と一致する．

定義　$S=\exp(\mathfrak{s})$ を対称対 (G, K) の**極大トーラス**という．

$$A\in\mathfrak{s}\ \text{は}\ \mathfrak{s}\ \text{の}\textbf{正則点}\iff\mathfrak{s}=\mathfrak{p}_A\ (=\{X\in\mathfrak{p}\ |\ [A, X]=0\}).$$

$a \in S$ は S の**正則点** $\Longleftrightarrow \mathfrak{z}=\mathfrak{p}_a\ (=\mathfrak{p}\cap Ada^{-1}(\mathfrak{p}))$.

補題 4.23 定理 3.17 の K の $\mathfrak{p}$ への随伴作用に関する $B\in\mathfrak{p}$ の軌道を $N=Ad\,(K)\cdot B$, $A\notin N$ を $\mathfrak{z}$ の正則点とするとき, $S(\mathfrak{p}, N, A)=S(\mathfrak{z}, N\cap\mathfrak{z}, A)$.

証明は定理 4.13 と同様である.

系 4.24 $S(\mathfrak{p}, N, A)\neq\phi$, 従って, $N\cap\mathfrak{z}\neq\phi$.

[証明] N はコンパクトであるから, A に最も近い点があって, A とその点を結ぶ直線は N と直交する. 故に $S(\mathfrak{p}, N, A)\neq\phi$. (終)

系 4.25 (G, K) の Cartan 部分環は K の随伴作用に関して互いに共役である.

[証明] $\mathfrak{z}$ の外に Cartan 部分環 $\mathfrak{z}'$ を考え, B を $\mathfrak{z}'$ の正則点, N を B の軌道とすれば, $N\cap\mathfrak{z}\neq\phi$ より, $Adk(B)\in\mathfrak{z}$ となる $k\in K$ がある $\Longrightarrow Adk(\mathfrak{z}')=\mathfrak{z}$.

(終)

補題 4.26 $\mathfrak{p}$ の任意の点 B の軌道 N と $\mathfrak{z}$ は各交点で直交し, $\dim N=\dim\mathfrak{p}-\dim\mathfrak{p}_B$. A が正則点ならばその軌道の次元は最大である.

[証明] 系 4.24 により, $B\in\mathfrak{z}$ としてよい. 補題 3.8 (1) と (3.2.3) によって, T_BN の直交補空間は $\mathfrak{p}_B$ である. また, $\mathfrak{p}_B\supset\mathfrak{z}=\mathfrak{p}_A$ である. これらから補題がえられる. (終)

定理 4.27 $B\in\mathfrak{p}$ の不足指数 $\delta_K(B)=\dim Ad(K)\cdot A-\dim Ad(K)\cdot B$ は次の式をみたす:

$$\delta_K(B)=\dim\mathfrak{p}_B-\dim\mathfrak{p}_A=\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g}_B-\dim\mathfrak{g}_A)$$

[証明] 補題 4.26 より直ちに, $\delta_K(B)=\dim\mathfrak{p}_B-\dim\mathfrak{p}_A$.

明らかに, $\mathfrak{g}_B=\mathfrak{k}_B\oplus\mathfrak{p}_B$. 補題 3.8 (1) より, $\mathfrak{p}=adB(\mathfrak{k})\oplus\mathfrak{p}_B$. $\mathfrak{g}_B{}^\perp$ を $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{g}_B$ の直交補空間とすると, $adB(\mathfrak{k})=\mathfrak{g}_B{}^\perp\cap\mathfrak{p}$ かつ $adB:\mathfrak{g}_B{}^\perp\cap\mathfrak{k}\cong\mathfrak{g}_B{}^\perp\cap\mathfrak{p}$ である. $\mathfrak{k}=\mathfrak{k}_B\oplus(\mathfrak{g}_B{}^\perp\cap\mathfrak{k})$, $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_B\oplus(\mathfrak{g}_B{}^\perp\cap\mathfrak{p})\Longrightarrow\dim\mathfrak{k}-\dim\mathfrak{k}_B=\dim\mathfrak{p}-\dim\mathfrak{p}_B$.
A でも同様で,

$$\dim\mathfrak{k}_B-\dim\mathfrak{p}_B=\dim\mathfrak{k}-\dim\mathfrak{p}=\dim\mathfrak{k}_A-\dim\mathfrak{p}_A$$

故に, $2\delta_K(B)=(\dim\mathfrak{p}_B-\dim\mathfrak{p}_A)+(\dim\mathfrak{k}_B-\dim\mathfrak{k}_A)=\dim\mathfrak{g}_B-\dim\mathfrak{g}_A$. (終)

$K\times K$ の G への作用についても類似の結果がえられる. (G, K) の極大トーラス S の点 b の軌道を $N=KbK$ とする. 補題 3.5 と (3.4) によって, $T_bG=$

$T_bN\oplus b\cdot\mathfrak{p}_b$ と直交分解される．定理 4.13 と同様に次の補題がえられる．

補題 4.28　$a\notin N$ は S の正則点とすると，a の軌道の次元は (S の点について) 最大，$N\cap S\neq\phi$，N と S は直交し，$S(G,N,a)=S(\mathfrak{s},N\cap\mathfrak{s},a)$.

記号　$\mathfrak{g}|a=\{X\in\mathfrak{g}\mid Ada\cdot X=X\}$

補題 4.29　$a\in S$ (一般に $\sigma(a)=a^{-1}$) のとき，次の直交分解がある：

$$\mathfrak{g}|a^2=\mathfrak{k}_a\oplus\mathfrak{p}_a,\quad \mathfrak{p}=(Ada-Ada^{-1})\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}_a$$

［証明］　明らかに $\sigma(\mathfrak{g}|a^2)=\mathfrak{g}|a^2$ であるから，$\mathfrak{g}|a^2=(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{k}\oplus(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p}$. $X\in\mathfrak{p}_a=\mathfrak{p}\cap Ada^{-1}\cdot\mathfrak{p}\Longrightarrow Ada\cdot X\in\mathfrak{p}\Longrightarrow Ada\cdot X=-\sigma(Ada\cdot X)=Ada^{-1}\cdot X\Longrightarrow Ada^2\cdot X=X\Longrightarrow X\in\mathfrak{g}|a^2$. 故に，$\mathfrak{p}_a\subset(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p}$. 逆に，$X\in(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p}\Longrightarrow\sigma(Ada^{-1}\cdot X)=-Ada\cdot X=-Ada^{-1}\cdot X\Longrightarrow Ada^{-1}\cdot X\in\mathfrak{p}$. 故に，$\mathfrak{p}_a=(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p}$. $\mathfrak{k}_a=(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{k}$ も同様に示され，第 1 式がえられる．

次に，$\sigma((Ada-Ada^{-1})X)=-(Ada-Ada^{-1})\sigma(X)$ であるから，$(Ada-Ada^{-1})\mathfrak{k}\subset\mathfrak{p}$ および $(Ada-Ada^{-1})\mathfrak{p}\subset\mathfrak{k}$. $Z\in\mathfrak{p}$ が $(Ada-Ada^{-1})\mathfrak{k}$ と直交すれば，$0=((Ada-Ada^{-1})\mathfrak{k},Z)=(\mathfrak{k},(Ada^{-1}-Ada)Z)\Longrightarrow(Ada^{-1}-Ada)Z\in\mathfrak{p}$ かつ $\in\mathfrak{k}$. 故に $Ada^{-1}\cdot Z=Ada\cdot Z\Longrightarrow Z\in(\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_a$. 逆に $\mathfrak{p}_a$ の元は $(Ada-Ada^{-1})\mathfrak{k}$ と直交することが同様にいえるから，第 2 式がえられる．　(終)

系 4.30　$a\in S$ のとき，

$$\dim((\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{p})=\dim((\mathfrak{g}|a^2)\cap\mathfrak{k}),\quad \dim\mathfrak{k}_a-\dim\mathfrak{p}_a=\dim\mathfrak{k}-\dim\mathfrak{p}$$

この系は $\mathfrak{k}_a=\mathrm{Ker}(Ada-Ada^{-1}:\mathfrak{k}\to\mathfrak{k})$ を使って定理 4.27 の証明と同様に示され，次の等式もえられる．

(4.31)　$K\times K$ の G への作用に関する $b\in S$ の不足指数は

$$\delta_K(b)=\dim\mathfrak{k}^a-\dim\mathfrak{k}^b=\frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}|b^2)-\dim(\mathfrak{g}|a^2))$$

で与えられる．(a は S の正則点，$\mathfrak{k}^b=\mathfrak{k}\oplus Adb^{-1}(\mathfrak{k}),\ \mathfrak{k}^a=\mathfrak{k}\oplus Ada^{-1}(\mathfrak{k})$.)

$K/K_{\mathfrak{s}}$ と $\Omega(G/K)$ のホモロジー

S を対称対 (G,K) の極大トーラス，T は S を含む G の極大トーラスとするとき，(G,K) の局所図式 $D'(G,K)\subset L(T)$ を次のように定義する：

定義　G の局所図式 $D'(G)$ の超平面のうち $\mathfrak{s}=L(S)$ を含まないものを $D'(G,K)$ の**超平面**といい，それらの和集合として (G,K) の**局所図式** $D'(G,K)$ を定義する．$L(T)-D'(G,K)$ の各連結成分を $D'(G,K)$ の **Weyl 領域**という．

記号　$K_{\mathfrak{z}}=\{k\in K\,|\,Ad k\cdot X=X,\ \forall X\in\mathfrak{z}\}$　($\mathfrak{z}$ の安定化群)

$N_K(\mathfrak{z})=\{k\in K\ |\ Ad k\cdot\mathfrak{z}=\mathfrak{z}\}$　($\mathfrak{z}$ の正規化群)

定義　$W(G,K)=N_K(\mathfrak{z})/K_{\mathfrak{z}}$ を (G,K) の **Weyl 群**という．

これらは，(コンパクト) Lie 群の局所図式や Weyl 群と類似の性質をもつ．例えば，補題 4.28 より容易に，

(4.32)　$W(G,K)$ は有限群で，$\mathfrak{z}$ の正則点 B の K-軌道 $N=Ad\,K\cdot B$ について，$N\cap\mathfrak{z}$ は B の $W(G,K)$ による軌道と一致する．

定理 4.20 と同様に，次の定理が成り立つ．

定理 4.33　補題 4.23 の仮定と記号の下に，$\Omega^*(\mathfrak{p},N,A)$ の Morse 級数は

$$\mathcal{M}(\mathfrak{p},N,A;\ t)=\sum_s t^{\lambda(s)}\quad(s\in S(\mathfrak{z},\ N\cap\mathfrak{z},A))$$

で与えられる．ここで，$\lambda(s)=\#\{$線分 s と交わる $D'(G,K)$ の超平面$\}$．従って，$\sum\dim_{\boldsymbol{k}}C_i t^i=\sum t^{\lambda(s)}$ となる(任意の)体 $\boldsymbol{k}$ 上のチェイン複体 $\sum_i C_i$ から始まるスペクトル系列で，$H_*(N;\ \boldsymbol{k})\cong H_*(K/K_{\mathfrak{z}};\ \boldsymbol{k})$ に収束するものがある．

注意　定理 6.7 によれば，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Z}_2$ のとき定理 4.33 のスペクトル系列は自明である．特に，$H_0(N;\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2$ より $\lambda(s)=0$ となる s は唯一つである．従って，(4.32)を用いて，次のことがわかる：

(4.34)　$W(G,K)$ は (G,K) の Weyl 領域に単純推移的に作用する．

定義　(G,K) の **Stiefel 図式** $D(G,K)$ は，$D'(G,K)$ の超平面に平行な $D(G)$ の超平面 ($D(G,K)$ の**超平面**という)の和集合として定義される．$L(S)-D(G,K)$ の各連結成分を (G,K) の **Weyl 胞体**という．

定理 4.15 と類似の結果は ($\exp:\mathfrak{t}\to T$ の代りに)

$$p:\mathfrak{z}\longrightarrow S \Longleftrightarrow p(X)=\exp\left(\frac{1}{2}X\right),\quad X\in\mathfrak{z}$$

を使ってえられる．このとき，$K\times K$ の G への作用に関する不足指数 δ_K は

(4.35)　$$\delta_K(p(X))=\#\{X \text{ を含む } D(G,K) \text{ の超平面}\}$$

で与えられ，次の定理がえられる．

定理 4.36　補題 4.28 の仮定と記号の下に，$\Omega^*(G,N,a)$ の Morse 級数は

$$\mathcal{M}(G,N,a;\ t)=\sum_s t^{\nu(s)}\quad(s\in S(\mathfrak{z},p^{-1}(N\cap\mathfrak{z}),A),\ \ a=p(A))$$

で与えられる．ただし，$\nu(s)=\#\{s$ が横切る $D(G,K)$ の超平面$\}$．

また，N を単位元 e の軌道とすれば，$N=KeK=K$ であり，ファイバー

空間の射影 $G\to G/K$ はホモトピー同値写像 $\Omega(G,K)\to\Omega(G/K)$ を誘導するから，定理 4.16 に対応する次の定理がえられる．

定理 4.37　G は 1-連結とする．(G,K) の 1 つの Weyl 領域 $\mathscr{F}$ を固定し，(G,K) の Weyl 胞体 $\varDelta$ は $\mathscr{F}$ の閉包 $\overline{\mathscr{F}}$ に含まれるもの全てを動くとする．

$$\nu(\varDelta)=\#\{\text{原点と }\varDelta\text{ の 1 点を結ぶ線分が横切る }D(G,K)\text{の超平面}\}$$

とするとき，$\sum_i \dim_{\boldsymbol{k}} C_i\, t^i=\sum_{\varDelta} t^{\nu(\varDelta)}$ をみたす(任意の)体 $\boldsymbol{k}$ 上の加群 $\sum_i C_i$ から始まるスペクトル系列で，$H_*(\Omega(G/K);\ \boldsymbol{k})$ に収束するものがある．

注意 4.38　定理 6.7 によれば，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Z}_2$ のとき，定理 4.37 のスペクトル系列は自明で，$H_*(\Omega(G/K);\ \boldsymbol{Z}_2)$ の Poincaré 級数は $\sum_{\varDelta} t^{\nu(\varDelta)}$ と一致する．定理 4.36 においても同様に，$H_*(\Omega(G,N);\ \boldsymbol{Z}_2)$ の Poincaré 級数は $\sum_s t^{\nu(s)}$ と一致する．

§5　コンパクト連結 Lie 群の階数と型

コンパクト連結 Lie 群の階数

この§では，コホモロジーの係数として有理数体 $\boldsymbol{Q}$ をとる．この§の結果は標数 0 の体 $\boldsymbol{k}$ に対しても，同型

$$H^*(X;\ \boldsymbol{k})\cong H^*(X;\ \boldsymbol{Q})\otimes_{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{k} \tag{5.1}$$

を使って，$\boldsymbol{Q}$ の場合と同様に成り立つことに注意する．

補題 5.2　$\tilde{G},G$ をコンパクト連結 Lie 群，$(\tilde{G},p,G)$ を被覆群とするとき，

$$p^*: H^*(G;\boldsymbol{Q})\cong H^*(\tilde{G};\boldsymbol{Q})\quad(\text{同型})$$

［証明］　$\mathrm{Ker}\,p$ は $\tilde{G}$ の中心に含まれる有限部分群である．$(\tilde{G},p,G)$ は $\mathrm{Ker}\,p$-バンドルであるから，分類空間 $B\,\mathrm{Ker}\,p$ と写像 $f: G\to B\,\mathrm{Ker}\,p$ があって，

$$\tilde{G}\xrightarrow{p}G\xrightarrow{f}B\,\mathrm{Ker}\,p$$

はファイバー空間となる．ここで，$\pi_1(B\,\mathrm{Ker}\,p)\cong\mathrm{Ker}\,p$ の $\tilde{G}$ への作用は $\mathrm{Ker}\,p$ の元による内部自己同型で与えられ，それは自明であることがわかる．従って，スペクトル系列：$E_2=H^*(B\,\mathrm{Ker}\,p;\ \boldsymbol{Q})\otimes H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Q})\Longrightarrow H^*(G;\ \boldsymbol{Q})$ がある．$\mathrm{Ker}\,p$ が有限アーベル群であることから，$H^*(B\,\mathrm{Ker}\,p;\ \boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ がわかる．従って，上のスペクトル系列は自明で，p^* は同型である．　(終)

定理 5.3　コンパクト連結 Lie 群 G に対して，有限個の奇数次数の元 $x_{2m_i+1}\in H^{2m_i+1}(G;\ \boldsymbol{Q})$ が存在して，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Q})=\Lambda(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$$

［証明］　補題5.2と第5章系5.31によって，G はトーラス $T_0=S^1\times\cdots\times S^1$ と1-連結 Lie 群 G' の直積としてよい．第4章定理6.26によって，G' に対して定理は正しい．T_0 に対しても明らかであるから，Künneth の同型によって，定理の正しいことがわかる．　　　　　　　　　　　　　　　　（終）

定義　上の定理における正の奇数の列 $(2m_1+1,\cdots,\ 2m_l+1)$ を G の **(有理)型**という(第4章§6参照)．

次に，l は $\mathrm{rank}\,G=\dim T$ (T は極大トーラス)と一致することを示そう．

補題 5.4　X は有限型(すべての i について $H^i(X)$ は有限生成) 1-連結空間とする．X の閉道空間 ΩX について，$H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{Q})=\Lambda(x_{2m_1+1},\cdots,x_{2m_l+1})$ ならば，

$$H^*(X;\ \boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}[x_{2m_1+2},\cdots,x_{2m_l+2}]$$

である．ここで，x_{2m_i+1} は転入的で $\tau(x_{2m_i+1})=x_{2m_i+2}$ となるようにとれる．

［証明］　まず，$l=1$ の場合は Gysin の完全系列を用いて容易に証明される．$\pi_i(S^{2m+1})$ $(i\neq 2m+1)$ が有限群であるから，Eilenberg-MacLane 空間 $K(\boldsymbol{Z},2m+1)$ の π_{2m+1} の生成元を表わす写像 $f: S^{2m+1}\to K(\boldsymbol{Z},2m+1)$ は0-同値，即ち，$f^{*-1}: H^*(S^{2m+1};\ \boldsymbol{Q})\cong H^*(K(\boldsymbol{Z},2m+1);\boldsymbol{Q})=\Lambda(u_{2m+1})$ である．$\Omega K(\boldsymbol{Z},2m+2)=K(\boldsymbol{Z},2m+1)$ であるから，$l=1$ の場合より，

(5.4)′　　$$H^*(K(\boldsymbol{Z},2m+2);\ \boldsymbol{Q})=\boldsymbol{Q}[u_{2m+2}]$$

$l>1$ とし，$l-1$ では定理は正しいと仮定する．最小次数で，$H^{2m_1+1}(\Omega X;\boldsymbol{Q})\cong H^{2m_1+2}(X;\ \boldsymbol{Q})$ である．その生成元 x_{2m_1+2} を整係数コホモロジー類にとり，全単射 $[X,K(\boldsymbol{Z},2m_1+2)]\cong H^{2m_1+2}(X)$ で x_{2m_1+2} に対応する写像を $f: X\to K(\boldsymbol{Z},2m_1+2)$ とすれば，$f^*(u_{2m_1+2})=x_{2m_1+2}$．$f$ をファイバー空間の射影でおきかえ，Y をそのファイバーとする：

(＊)　　$$Y\xrightarrow{\ i\ }X\xrightarrow{\ f\ }K(\boldsymbol{Z},2m_1+2)$$

閉道空間をとってもファイバー空間

$$\Omega Y\xrightarrow{\Omega i}\Omega X\xrightarrow{\Omega f}K(\boldsymbol{Z},2m_1+1)=\Omega K(\boldsymbol{Z},2m_1+2)$$

がえられる．第4章定理6.27によって，0-同値写像 $g:\prod_{i>1}S^{2m_i+1}\to\Omega X$ がある．ここで，$\Omega f\circ(g|S^{2m_i+1})\simeq 0$ $(i>1)$ となるように g を選べることは容易にわかるから，$h:\prod_{i>1}S^{2m_i+1}\to\Omega Y$ が存在して，$\Omega i\circ h\simeq g|\prod_{i>1}S^{2m_i+1}$ となる．ホモトピー群を mod $\mathscr{C}_0$ (有限群のクラス)で比較して，h が0-同値，従って $H^*(\Omega Y;$

$Q)\cong H^*(\prod_{i>1} S^{2m_i+1};\ Q)=\Lambda(x_{2m_2+1},\cdots,x_{2m_l+1})$ となることがわかる．帰納法の仮定から，$H^*(Y;\ Q)=Q[x_{2m_2+2},\cdots,x_{2m_l+2}]$．ファイバー空間(✻)において，その底空間およびファイバーの $H^*(\quad;\ Q)$ は偶数次数の元のみよりなるから，そのスペクトル系列は自明で，

$$H^*(X;\ Q)\cong H^*(K(Z,2m_1+1)\,;\ Q)\otimes H^*(Y;\ Q)\cong Q[x_{2m_1+2},\cdots,x_{2m_l+2}]$$

x_{2m_i+2} の懸垂(転入の逆で一意的)像を x_{2m_i+1} にとれば定理がえられる．

(終)

注意　この補題は Z_p を係数としても成り立つ(第 7 章定理 2.14 参照)．

定理 5.5　G をコンパクト連結 Lie 群，T を G の極大トーラスとする．G の型を $(2m_1+1,\cdots,2m_l+1)$ とするとき次が成り立つ：

(1)　l は $\operatorname{rank} G=\dim T$ と一致する．

(2)　G/T の Poincaré 多項式は次のように与えられる：

$$P(G/T,t)=\prod_{i=1}^{l}\frac{1-t^{2m_i+2}}{1-t^2}=\prod_{i=1}^{l}(1+t^2+t^4+\cdots+t^{2m_i})$$

(3)　G の Weyl 群 $W(G)$ の位数は $|W(G)|=\prod_{i=1}^{l}(m_i+1)$．

(4)　G が 1-連結のとき，$P(\Omega G,t)=\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i})^{-1}$．

(5)　$H^*(BG;\ Q)=Q[x_{2m_1+2},\cdots,x_{2m_l+2}]$，$x_{2m_i+2}=\tau(x_{2m_i+1})$

［証明］　(1)　$\operatorname{rank} G=\dim T=l'$ とする．ファイバーバンドル

$$G/T\longrightarrow BT\longrightarrow BG$$

に関する Q-係数スペクトル系列において，$H^*(G/T;\ Q)$ は定理 4.21 によって奇数次数の元はない．同様のことは，G と ΩBG が(弱)ホモトピー同値であることと補題 5.4 より BG についても正しいことがわかる．従って，上のファイバー空間のスペクトル系列は自明で，次の等式が成り立つ：

$$P(BT,t)=P(BG,t)\cdot P(G/T,t)=\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i+2})^{-1}\cdot P(G/T,t)$$

$H^*(BT;\ Q)=Q[t_1,\cdots,t_{l'}]$, $t_i\in H^2\Longrightarrow P(BT,t)=(1-t^2)^{-l'}\Longrightarrow P(G/T,t)(1-t^2)^{l'-l}=\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i+2})/(1-t^2)=\prod_{i=1}^{l}(1+t^2+t^4+\cdots+t^{2m_i})$．$t=1$ とおけば，定理 4.21 によって $|W(G)|=P(G/T,1)$ は正の整数であるから，$l=l'=\operatorname{rank} G$．従って (2) および (3) がえられる．

(4) は第 4 章系 6.29 の第 2 式，(5) は補題 5.4 よりえられる．　(終)

系 5.5′　$Z(T')$ の型を $(2n_1+1,\cdots,2n_l+1)$ とすれば，

$$P(G/Z(T'),\ t)=\prod_{i=1}^{l}\frac{1-t^{2m_i+1}}{1-t^{2n_i+1}}$$

［証明］ 定理 4.20 を使って上と同様に,

$$P(G/T,\ t)=P(G/Z(T'),\ t)\cdot P(Z(T')/T,\ t) \qquad \text{(終)}$$

単純 Lie 群の型と root の関係

コンパクト連結単純 Lie 群 G の root を $\theta_r: L(T)\to \boldsymbol{R}$ $(r=1,2,\cdots,m)$, 単純 root α_i $(i=1,2,\cdots,l)$ を定める基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}=\{X\in L(T)\mid \theta_r(X)>0,\ (r=1,\cdots,m)\}$ の中の平行体 $\mathcal{T}$ を

$$\mathcal{T}=\{X\in L(T)\ \mid\ 0<\theta_i(X)<1\quad (i=1,\cdots,l)\}$$

で定義する．また, $\overline{\mathcal{F}}$ のベクトル $X_1,\cdots,X_l$ を単純 root α_i を用いて,

$$\alpha_i(X_j)=\delta_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,l)$$

で定める．

$\boldsymbol{Z}_+$ を 0 または正の整数の集合, $\boldsymbol{Z}_+^l$ を l 個の $\boldsymbol{Z}_+$ の直積とする． $\boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_l)\in\boldsymbol{Z}_+^l$ に対して, $X_{\boldsymbol{n}}\in\overline{\mathcal{F}}$ を次の式で定める：

$$X_{\boldsymbol{n}}=n_1X_1+\cdots+n_lX_l$$

補題 5.6 (1) $\mathcal{F}$ に含まれる任意の Weyl 胞体 $\varDelta$ は, $\mathcal{T}$ に含まれる Weyl 胞体 $\varDelta_o$ と $\boldsymbol{Z}_+^l$ の元 $\boldsymbol{n}$ によって, 一意的に $\varDelta=X_{\boldsymbol{n}}+\varDelta_o=\{X_{\boldsymbol{n}}+X\mid X\in\varDelta_o\}$ と表わされる．

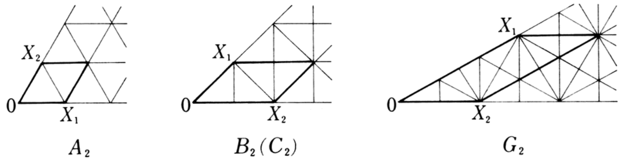
(2) $\tilde{\alpha}=a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l$ を dominant root とするとき, $\mathcal{T}$ に含まれる Weyl 胞体の個数は $l!\prod_{i=1}^{l}a_i$ である．

(3) 正 root θ_r の和を $\sum_{r=1}^{m}\theta_r=d_1\alpha_1+\cdots+d_l\alpha_l$ とするとき, 定理 4.16 の整数 $\nu(\varDelta)$ について次の式が成り立つ：

$$\nu(X_{\boldsymbol{n}}+\varDelta)\ =\ \nu(\varDelta)+\sum_{i=1}^{l}d_in_i,\quad \boldsymbol{n}=(n_1,\cdots,n_l)$$

［証明］ (1) $X_{\boldsymbol{n}}$ による平行移動は明らかに $D(G)$ を保つから Weyl 胞体を Weyl 胞体に写す． $X\in\varDelta$ に対して, $\alpha_i(X)$ の整数部分を n_i とおけば $X-X_{\boldsymbol{n}}\in\varDelta_o$. また $\varDelta_o\subset\mathcal{T}$, $\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}_+^l$ に対して $X_{\boldsymbol{n}}+\varDelta_o\subset\mathcal{F}$ も明らか． これらより (1) がえられる．(次のページの図の太線の内側は $\mathcal{T}$ を示している．)

(2) 基本 Weyl 胞体は $\varDelta_o=\{X\in\mathcal{F}\mid\tilde{\alpha}(X)<1\}$ で与えられる． $\varDelta_o$ の $\overrightarrow{\boldsymbol{0}X_i}$ 方向の稜の長さは $\overline{\boldsymbol{0}X_i}$ の $1/a_i$ である． また平行体 $\mathcal{T}$ と $\boldsymbol{0}, X_1,\cdots,X_l$ を頂点と



する単体の体積の比は $l!:1$ である．従って，$\mathcal{T}$ と Δ_o の体積の比は $l!\prod_{i=1}^{l}a_i$：1．Weyl 胞体は互いに合同であるから，(2)がえられる．

(3)　$X\in\Delta$ とするとき，0 と X を結ぶ線分が $L_r=\theta_r^{-1}(\boldsymbol{Z})$ の超平面と交わる点の数は $\theta_r(X)$ の整数部分である．これらの和が $\nu(\Delta)$ であるから，$\nu(X_n+\Delta)$ と $\nu(\Delta)$ の差は $\sum_r\theta_r(X_n)$ であることがわかる．従って，

$$\nu(X_n+\Delta)-\nu(\Delta)=\sum_r\theta_r(X_n)=\sum_{i=1}^{l}d_i\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{l}n_jX_j\Big)$$
$$=\sum_{i,j}d_in_j\alpha_i(X_j)=\sum_{i,j}d_in_j\delta_{ij}=\sum_{i=1}^{l}d_in_i \qquad (終)$$

定理 5.7　G をコンパクト単純 Lie 群，$(2m_1+1,\cdots,2m_l+1)$ を G の型，$\tilde{\alpha}=a_1\alpha_1+\cdots+a_l\alpha_l$ を dominant root，$\sum_r\theta_r=d_1\alpha_1+\cdots+d_l\alpha_l$ を正 root の和とするとき，次の関係式が成り立つ：

$$\prod_{i=1}^{l}d_i=l!\prod_{i=1}^{l}a_im_i$$

［証明］　定理 5.5(4) と定理 4.16 によって，$P(\Omega G,t)$ の 2 通りの表示がえられ，それらは等しいから，

$$\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i})^{-1}=\sum_{\Delta\subset\mathcal{T}}t^{2\nu(\Delta)}$$

補題 5.6 の (1), (3) を使い，右辺の和を各 $X_n+\mathcal{T}$ に属する Δ に分けて部分和をとることによって，

$$\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i})^{-1}=\sum_{\Delta\subset\mathcal{T}}\Big(t^{2\nu(\Delta)}\sum_n\prod_{i=1}^{l}t^{2d_in_i}\Big)=\sum_{\Delta\subset\mathcal{T}}t^{2\nu(\Delta)}\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2d_i})^{-1}$$

従って，

$$\prod_{i=1}^{l}(1+t^2+\cdots+t^{2d_i-2})=\sum_{\Delta\subset\mathcal{T}}t^{2\nu(\Delta)}\prod_{i=1}^{l}(1+t^2+\cdots+t^{2m_i-2})$$

ここで，$t=1$ とおけば，$\sum 1^{2\nu(\Delta)}$ は $\mathcal{T}$ に含まれる Δ の個数であるから，補題 5.6(2) を用いて，

$$\prod_{i=1}^{l} d_i = l! \prod_{i=1}^{l} a_i \prod_{i=1}^{l} m_i = l! \prod_{i=1}^{l} a_i m_i$$ (終)

例外 Lie 群の型

コンパクト連結 Lie 群 G について，第5章系5.31の同型

$$(T \times \tilde{G}_1 \times \cdots \times \tilde{G}_k)/\cong G$$

を考えるとき，補題5.2と Künneth の公式によって，

(5.8)　G の型は $T, \tilde{G}_1, \cdots, \tilde{G}_k$ の型の和集合として表わされる．

従って，単純 Lie 群の型を求めることが問題になるが，古典群の場合は第3章において調べ上げられている．よって，ここでは例外 Lie 群の型を決定しよう．

定理 5.9　(コンパクト)例外 Lie 群 G の次元と正 root の和 $\sum_{r=1}^{m} \theta_r$ は次のように与えられる：

(E_6)　$\dim E_6 = 78$,　$\sum \theta_r = 16\alpha_1 + 22\alpha_2 + 30\alpha_3 + 42\alpha_4 + 30\alpha_5 + 16\alpha_6$

(E_7)　$\dim E_7 = 133$,　$\sum \theta_r = 34\alpha_1 + 49\alpha_2 + 66\alpha_3 + 96\alpha_4 + 75\alpha_5 + 52\alpha_6 + 27\alpha_7$

(E_8)　$\dim E_8 = 248$,　$\sum \theta_r = 92\alpha_1 + 136\alpha_2 + 182\alpha_3 + 270\alpha_4 + 220\alpha_5 + 168\alpha_6 + 114\alpha_7 + 58\alpha_8$

(F_4)　$\dim F_4 = 52$,　$\sum \theta_r = 16\alpha_1 + 30\alpha_2 + 42\alpha_3 + 22\alpha_4$

(G_2)　$\dim G_2 = 14$,　$\sum \theta_r = 10\alpha_1 + 6\alpha_2$

［証明］　$L(G)$ の分解 $L(G) = L(T) \oplus \sum_{r=1}^{m} V_r, \dim V_r = 2$, より $\dim G = l + 2m$. 第5章 (6.26) の正 root の表から，正 root の個数を数えて $\dim G$ が定まる．

また，正 root の和をとるとき，E_l $(l=6,7,8)$ の場合の $\sum(-1)^{\nu(i)} e_i$ の項は消し合い，$\sum_{i<j}(e_i + e_j - e_i + e_j) = 2\sum_{i<j} e_j$ であるから，次がえられる：

(E_6)　$\sum \theta_r = 8(e_8 - e_7 - e_6) + 2\sum_{1 \le i < j \le 5} e_j = 8(e_8 - e_7 - e_6) + 2\sum_{j=1}^{5}(j-1)e_j$

(E_7)　$\sum \theta_r = 17(e_8 - e_7) + 2\sum_{1 \le i < j \le 6} e_j = 17(e_8 - e_7) + 2\sum_{j=1}^{6}(j-1)e_j$

(E_8)　$\sum \theta_r = 32e_8 + 2\sum_{1 \le i < j \le 8} e_j = 46e_8 + 2\sum_{j=1}^{7}(j-1)e_j$

(F_4)　$\sum \theta_r = \sum_{i=1}^{4} e_i + 2\sum_{1 \le i < j \le 4} e_i + \frac{1}{2}\sum(e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) = 11e_1 + 5e_2 + 3e_3 + e_4$

(G_2)　$\sum \theta_r = -2e_1 - 4e_2 + 6e_3$

これらを単純 root $\alpha_1, \cdots, \alpha_l$ で書き表わして定理の $\sum \theta_r$ の式をうる．(終)

定理 5.10　例外 Lie 群 G の型 $(2m_1+1, \cdots, 2m_l+1)$ は次のように与えられ，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Q}) = \Lambda(x_{2m_1+1}, \cdots, x_{2m_l+1})$$

となる：

$$E_6 \text{ の型} = (3, 9, 11, 15, 17, 23)$$
$$E_7 \text{ の型} = (3, 11, 15, 19, 23, 27, 35)$$
$$E_8 \text{ の型} = (3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59)$$
$$F_4 \text{ の型} = (3, 11, 15, 23)$$
$$G_2 \text{ の型} = (3, 11)$$

［証明］　$\dim G = \sum_{i=1}^{l}(2m_i+1)$ であるから，次の式が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{l} m_i = \frac{1}{2}(\dim G - l)$$

定理 5.9 および第 5 章(6.31)より次の値がえられる：

(E_6)　$\sum m_i=36$,　$\prod d_i=2^{12}\cdot3^3\cdot5^2\cdot7\cdot11$,　$\prod a_i=2^3\cdot3$,　$l!=2^4\cdot3^2\cdot5$

(E_7)　$\sum m_i=63$,　$\prod d_i=2^9\cdot3^6\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17$,　$\prod a_i=2^5\cdot3^2$,　$l!=2^4\cdot3^2\cdot5\cdot7$

(E_8)　$\sum m_i=240$,　$\prod d_i=2^{14}\cdot3^5\cdot5^2\cdot7^2\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29$,　$\prod a_i=2^7\cdot3^3\cdot5$,　$l!=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7$

(F_4)　$\sum m_i=24$,　$\prod d_i=2^7\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11$,　$\prod a_i=2^4\cdot3$,　$l!=2^3\cdot3$

(G_2)　$\sum m_i=6$,　$\prod d_i=2^2\cdot3\cdot5$,　$\prod a_i=2\cdot3$,　$l!=2$

定理 5.7 より，$\prod m_i=\prod d_i/l!\prod a_i$ であるから，$\prod m_i$ は次の通りである：

(E_6)　$\prod m_i=2^5\cdot5\cdot7\cdot11$

(E_7)　$\prod m_i=3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17$

(E_8)　$\prod m_i=7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23\cdot29$

(F_4)　$\prod m_i=5\cdot7\cdot11$

(G_2)　$\prod m_i=5$

定理 4.17 によって，$H_3(G)\cong\pi_3(G)\cong\boldsymbol{Z}$ であるから，$m_1=1$, $m_i>1$ $(i>1)$ である．従って，E_8, F_4, G_2 に対して $\prod m_i$ の分解は一意的に定まる．E_6, E_7 の場合も $\sum m_i$ の条件と合わせて，$(m_1, \cdots, m_l)$ は

(E_6)　$(1, 4, 5, 7, 8, 11)$,　(E_7)　$(1, 5, 7, 9, 11, 13, 17)$

であることがわかる．よって定理は証明された．　（終）

§6　Bott-Samelson の K-サイクル

K-サイクルとそのホモロジー類

この§では，コンパクト連結 Lie 群 K が Riemann 多様体 M に等長変換で作用し，その作用は変分完備であるとする．

N を最大次元の K-軌道，$r\in M$ とし，$M \bmod N$ の (K-横断的) 測地線分

$$s\in S(M,N,r),\quad s:(I,0,1)\longrightarrow(M,N,r),\quad \dot{s}(0)\perp N$$

を考える．s の上の例外点を $x_i=s(t_i)$ とし，その安定化群の単位元成分を

$$K_i=(K_{x_i})_0=(K_{s(t_i)})_0$$

とおく．ただし，t_i は $0<t_1<t_2<\cdots<t_n<1$ の順に並んでいるとする． 例外点以外の点，即ち正則点 $x=s(t)$ では

$$K_s=(K_x)_0=(K_{s(t)})_0\quad(t\neq t_i,\ i=1,\cdots,n)$$

である．$K_s\subset K_i$ で，不足指数 $\delta(x_i)$ および s の指数 $\lambda(s)$ が次で与えられる：

$$(6.1)\qquad \begin{gathered}\delta(x_i)=\delta(s(t_i))=\dim K_i-\dim K_s>0\\ \lambda(s)=\sum_{i=1}^{n}\delta(x_i)=\sum_{i=1}^{n}(\dim K_i-\dim K_s)\\ W_s=K_1\times K_2\times\cdots\times K_n,\quad K_s{}^n=K_s\times K_s\times\cdots\times K_s\quad(n\text{ 個})\end{gathered}$$

とおき，$K_s{}^n$ の W_s への右からの作用を次で定義する：

$$(6.2)\qquad \begin{gathered}\bar{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in W_s,\quad b=(b_1,\cdots,b_n)\in K_s{}^n\text{ に対して，}\\ \bar{a}\cdot b=(b_2{}^{-1}a_1b_1,\cdots,b_n{}^{-1}a_{n-1}b_{n-1},a_nb_n)\end{gathered}$$

定義　(6.2)の作用による W_s の商空間を $\Gamma_s=W_s/K_s{}^n$ と表わし，s の **K-サイクル**という．

Γ_s の各点 $a=\bar{a}\cdot K_s{}^n$，$\bar{a}\in W_s$，に対して $\Omega^*=\Omega^*(M,N,r)$ の道

$$f_s(a):(I,0,1)\longrightarrow(M,N,r),\quad \dot{f}_s(0)\perp N$$

を以下のように定義する．まず，a の代表元 $\bar{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in W_s$ に対して，

$$\bar{f}_s(\bar{a}):I\longrightarrow M$$

を各区間 $[t_{i-1},\ t_i]$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$ の上で式

$$(6.3)\qquad \bar{f}_s(\bar{a})(t)=(a_n\cdots a_i)\cdot s(t)=\prod_{j=n}^{i}a_j\cdot s(t),\quad t_{i-1}\leq t\leq t_i$$

で与える．ただし，$t_0=0$，$t_{n+1}=1$ とし， 特に $\bar{f}_s(\bar{a})|[t_n,1]=s|[t_n,1]$ とする．

補題 6.4　(1)　(6.3)は $\Omega^*=\Omega^*(M,N,r)$ の道 $\bar{f}_s(\bar{a}):I\to\Omega^*$，従って写像 $\bar{f}_s$: $W_s\to\Omega^*$ を定義する．$\bar{f}_s(\bar{a})$ の長さは s の長さに等しい．

(2) $\bar{f}_s(\bar{a})$ は $a=\bar{a}\cdot K_s{}^n$ の代表元 $\bar{a}$ に無関係に定まり, $f_s(a)=\bar{f}_s(\bar{a})$ で定義される $f_s: \Gamma_s\to\Omega^*$ は中への同相写像である.

［証明］ (1) $\bar{f}_s(\bar{a})$ が道であることをいうには, $t=t_i$ のとき(6.3)の与える2種類の定義 $\bar{f}_s(\bar{a})(t_i)=(a_n\cdots a_i)\cdot s(t_i)$ と $\bar{f}_s(\bar{a})(t_i)=(a_n\cdots a_{i-1})\cdot s(t_i)$ が一致することをいえばよい. $a_i\in K_i=K_{s(t_i)}\Longrightarrow a_i\cdot s(t_i)=s(t_i)$ であるから, この2つの定義は一致する. $\bar{f}_s(\bar{a})(1)=r$ は自明. $\bar{f}_s(\bar{a})(0)\in N$ であり, この点で $\bar{f}_s(\bar{a})$ が N と直交していることは, 0に近い t について, $\bar{f}_s(\bar{a})(t)=(a_n\cdots a_1)\cdot s(t)$ であり, $a_n\cdots a_1\in K$ の作用は Riemann 計量を保つことより明らかである.

K の作用は曲線の長さを変えないから, $\bar{f}_s(a)$ の長さは s の長さに等しい.

(2) $b=(b_1, \cdots, b_n)$ について, $\bar{a}\cdot b=\bar{c}=(c_1, \cdots, c_n)$ とおくとき, (6.2)より, $c_n\cdots c_i=a_n\cdots a_ib_i$. $b_i\cdot s(t)=s(t)$ $(\forall t)$ であるから, (6.3)によって $\bar{f}_s(\bar{a})=\bar{f}_s(\bar{c})=\bar{f}_s(\bar{a}\cdot b)$. 故に, $f_s: \Gamma_s\to\Omega^*$ が $f_s(a)=\bar{f}_s(\bar{a})$ によって定義される.

$\bar{f}_s(\bar{a})=\bar{f}_s(\bar{c})$ $(\bar{a}=(a_1, \cdots, a_n),\ \bar{c}=(c_1, \cdots, c_n)\in W_s)$ と仮定する. (6.3)から, $t\in[t_{i-1}, t_i]$ について, $(a_n\cdots a_i)\cdot s(t)=(c_n\cdots c_i)\cdot s(t)$. 従って, $b_i=(a_n\cdots a_i)^{-1}(c_n\cdots c_i)$ は K_s に属する. $a_n\cdots a_ib_i=c_n\cdots c_i$ であるから, これを順次解いて $c_n=a_nb_n$, $c_i=b_{i+1}^{-1}a_ib_i$ $(i=n-1, \cdots, 2, 1)$ がえられ, $\bar{a}\cdot K_s{}^n=\bar{c}\cdot K_s{}^n$ となる. これは f_s が単射であることを示している. Γ_s はコンパクト Hausdorff 空間であるから, f_s は中への同相である. (終)

$\dim W_s-\dim K_s{}^n=\sum_{i=1}^{n}(\dim K_i-\dim K_s)=\lambda(s)$ であるから,

(6.5) $\Gamma_s=W_s/K_s{}^n$ は $\lambda(s)$ 次元の多様体である.

定義 Γ_s の基本ホモロジー類 $[\Gamma_s]\in H_{\lambda(s)}(\Gamma_s; \boldsymbol{Z}_2)$ の $f_{s*}: H_{\lambda(s)}(\Gamma_s; \boldsymbol{Z}_2)\to H_{\lambda(s)}(\Omega^*; \boldsymbol{Z}_2)$ による像を $\gamma_s=f_{s*}[\Gamma_s]$ と表わし, s の **K-ホモロジー類**という.

Γ_s が可符号多様体のときは, 同様に $\gamma_s=f_{s*}[\Gamma_s]\in H_{\lambda(s)}(\Omega^*)$ で表わし, s の**整係数 K-ホモロジー類**という.

K-サイクルと Morse 理論

$s\in S(M, N, r)$ の長さを $L(s)=c$ とし, §1のように,

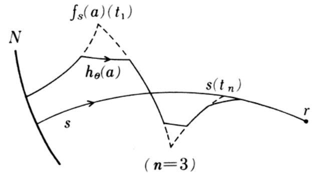
$$\Omega_c=\{u\in\Omega^* \mid L(u)\leq c\}, \quad \Omega_c{}^-=\{u\in\Omega^* \mid L(u)<c\}$$

を考える. 補題6.4(1)の後半によって, $f_s(\Gamma_s)\subset\Omega_c$ である.

$e_*\in\Gamma_s$ を $(e, e, \cdots, e)$ の類とする $(f_s(e_*)=s)$.

補題 6.6 $h_0=f_s$ をみたすホモトピー $h_\theta:(\Gamma_s, e_*)\longrightarrow(\Omega_c, s)$, $0\leq\theta\leq1$, が存在して，$0<\theta\leq1$ の範囲で $h_\theta(\Gamma_s)\subset\Omega_c^-\cup\{s\}$，かつ，長さの関数 $L\circ h_\theta$ は e_* において非退化な C^∞-関数である．

［証明］ ε を十分小さい正数とし，$h_\theta(a)|[t_i-\theta\varepsilon, t_i+\theta\varepsilon]$ を $f_s(a)(t_i-\theta\varepsilon)$ と $f_s(a)(t_i+\theta\varepsilon)$ を結ぶ測地線分でおきかえ，残りでは $f_s(a)$ と同じものとおいてホモトピー h_θ が定義される．明らかに $L(h_\theta(a))\leq c$ である．$a_i\neq e$ となる i について，$h_\theta(a)|[t_i-\theta\varepsilon, t_i+\theta\varepsilon]$ の長さは $f_s(a)|[t_i-\theta\varepsilon, t_i+\theta\varepsilon]$ の長さより短くなる．故に，$a\neq e_*\Longrightarrow L(h_\theta(a))<c$.



さらに，a が e_* に十分近いとき，$f_s(a)$ と $h_\theta(a)$ は $[t_i-\theta\varepsilon, t_i+\theta\varepsilon]$ において一辺 $b\theta$ の二等辺三角形で近似され，その頂角を $\pi-2\alpha$ とするとき，長さの差 $2b\theta-2\,b\theta\cos\alpha$ は $b\theta\alpha^2$ で近似される．このことから $L\circ h_\theta$ は非退化であることがわかる． （終）

定理 6.7 K の M への作用は変分完備，$r\in M$ は最大次元の軌道上の点，$N=K\cdot p$ を p の軌道とする．$\Omega^*=\Omega^*(M,N,r)\supset S(M,N,r)$ を考える．

(1) $H^*(\Omega^*;\boldsymbol{Z}_2)$ は $\{\gamma_s=f_{s*}[\Gamma_s]|\ s\in S(M,N,r)\}$ を $\boldsymbol{Z}_2$ 上の基底にもつ．

(2) すべての $s\in S(M,N,r)$ について，Γ_s が可符号多様体であれば，$H^*(\Omega^*)$ は $\boldsymbol{Z}$-自由加群で，$\{\gamma_s\in f_{s*}[\Gamma_s]|\ s\in S(M,N,r)\}$ をその基底にもつ．

［証明］ まず，(2)の場合，補題 6.6 によって，$\{\gamma_s\}$ は定理 1.17 における $\sum_k H_*(\Omega_k, \Omega_{k-1})$ の $\boldsymbol{Z}$ 上の基底をなしていることがわかる．即ち，定理 1.18 の証明における $E^1=\sum E^1_{p,q}$ は $\{\gamma_s\}$ を基底にもち，γ_s は $H_*(\Omega_k)$ からの像であるから，スペクトル系列における微分 d^r は $d^r(\gamma_s)=0$ をみたす．これは，スペクトル系列が自明：$E^1=E^\infty$ であり，$\{\gamma_s\}$ は $H_*(\Omega^*)$ の $\boldsymbol{Z}$-基底であることを示している．(1)の場合は議論をすべて $\boldsymbol{Z}_2$-係数で考えればよい． （終）

K-サイクルのバンドル

K-サイクル Γ は K の部分群 $K_1,\cdots,K_n$ とそれらに含まれる K_s に関して，(6.2)の作用によって，

$$\Gamma=W/K_s{}^n,\quad W=K_1\times K_2\times\cdots\times K_n$$

で与えられた．$n\geq 2$ のとき，第1因子を除いて考えて，

$$\Gamma'=W'/K_s^{n-1},\quad W'=K_2\times\cdots\times K_n$$

とおく．

定理 6.8 (1) 自然な射影 $p:W\to W'$ は，K_1/K_s をファイバーとするバンドルの射影 $p:\Gamma\to\Gamma'$ を誘導する．自然な射入 $W'\hookrightarrow W$ の誘導する写像 $\sigma:\Gamma'\to\Gamma$ は p に関する切断である：$p\circ\sigma=1_{\Gamma'}$.

(2) $h\in N_{K_1}(K_s)$ の W への作用 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mapsto(a_1h^{-1},a_2,\cdots,a_n)$ は Γ への作用 $\varphi:\Gamma\to\Gamma$ を誘導する．$p\circ\varphi=\varphi$ であり，$\varphi|(K_1/K_s)$ は通常の作用である．

［証明］(6.2) と同じ式によって，$K_s{}^n$ の W への作用は $K_1\times K_s^{n-1}$ の W への作用に拡張され，ファイバーバンドル（の射影）$p:\Gamma=W/K_s{}^n\to W/(K_1\times K_s^{n-1})=W'/K_s^{n-1}=\Gamma'$ がえられ，そのファイバーは $(K_1\times K_s^{n-1})/K_s{}^n=K_1/K_s$ である．その他は容易にわかる．（終）

$p\circ\sigma=1$ と $p\circ\varphi=\varphi$ より直ちに，

(6.9) $p^*:H^*(\Gamma')\to H^*(\Gamma)$ は直和因子への単射で，その像は φ^* で不変である $(\varphi^*\circ p^*=p^*)$．射入 $i:K_1/K_s\hookrightarrow\Gamma$ について，$i^*\circ p^*=0$.

補題 6.10 Γ' は1-連結，ファイバーは球面 $S^m=K_1/K_s\ (m\geq 1)$ と仮定する．

(1) $H^m(S^m)$ の生成元 u に対して，$i^*(z)=u$ および $\sigma^*(z)=0$ をみたす $z\in H^m(\Gamma)$ が定まり，$(y,y')\mapsto z\cdot p^*(y)+p^*(y')$ は次の同型を与える：

$$H^{*-m}(\Gamma')\oplus H^*(\Gamma')\cong H^*(\Gamma)$$

(2) 定理 6.8 の作用 φ が $(\varphi|S^m)^*=-1$ をみたし，$H^*(\Gamma')$ に 2-torsion がないと仮定すれば，$\mathrm{Im}\,p^*=H^*(\Gamma)^\varphi=\{x\in H^*(\Gamma)\mid\varphi^*(x)=x\}$.

さらに，$\varphi^2=1$ かつ m が偶数ならば，$z\cdot\varphi^*(z)=0$ で，この式と $H^*(\Gamma')$ によって $H^*(\Gamma)$ は定まる．

［証明］(1) スペクトル系列 $E_2=H^*(\Gamma')\otimes H^*(S^m)\Longrightarrow H^*(\Gamma)$ を考える．Gysin 系列

$$H^m(\Gamma)\xrightarrow{i^*}H^m(S^m)\xrightarrow{\tau}H^{m+1}(\Gamma')\xrightarrow{p^*}H^{m+1}(\Gamma)$$

の完全性と (6.9) より，$i^*:H^*(\Gamma)\to H^*(S^m)$ は全射．従って，スペクトル系列は自明で，$H^*(\Gamma')\xrightarrow{\otimes u}E_2{}^{*,m}=E_\infty{}^{*,m}=H^{*+m}(\Gamma)/p^*H^{*+m}(\Gamma')$ は $H^*(\Gamma')$-加群の同型となる．これから，$i^*(z)=u$ をみたす任意の z に対して (1) の後半が成り立つことがわかる．このような1つの z_0，$i^*(z_0)=u$，に対して，$z=z_0-p^*\sigma^*$

(z_0) とおけば，$\sigma^*\circ p^*=1$，$i^*\circ p^*=0$ だから，$i^*(z)=u$，$\sigma^*(z)=0$.

(2)　(6.9) の後半より，$\mathrm{Im}\, p^*\subset H^*(\Gamma)^\varphi$. $\varphi^*(z)=a\cdot z+p^*y$，$a\in \boldsymbol{Z}$，とおくとき，$i^*$ を施せば，$a\cdot u=i^*\varphi^*(z)=(\varphi|S^m)^*(u)=-u\Longrightarrow a=-1$. 故に，

(6.10)′　　$\varphi^*(z)=-z+p^*(y),\quad y\in H^*(\Gamma')$

$x\in H^*(\Gamma)^\varphi$ を $x=z\cdot p^*(y_1)+p^*(y_2)$ と表わすと，$x=\varphi^*(x)$ と (6.10)′ より，

$$z\cdot p^*(y_1)+p^*(y_2)=\varphi^*(z)p^*(y_1)+p^*(y_2)=z\cdot p^*(-y_1)+p^*(yy_1+y_2)$$

故に，$y_1=-y_1\Longrightarrow 2y_1=0$. 仮定によって，$y_1=0\Longrightarrow x\in \mathrm{Im}\, p^*$. 故に $H^*(\Gamma)^\varphi=\mathrm{Im}\, p^*$ がえられた.

$\varphi^2=1$ かつ，m が偶数のときは，$x=z\cdot\varphi^*(z)$ について，$\varphi^*(x)=\varphi^*(z)\cdot z=x\Longrightarrow x=p^*(y)$ となる y がある．$\sigma^*\circ p^*=1$ と $\sigma^*(z)=0$ を使って，

$$y=\sigma^*p^*(y)=\sigma^*(x)=\sigma^*(z\cdot\varphi^*z)=\sigma^*(z)\cdot\sigma^*\varphi^*(z)=0$$

故に，$z\cdot\varphi^*(z)=x=p^*(y)=0$ が成り立ち，(6.10)′ によって，

(6.10)″　　$z^2=z\cdot p^*(y),\quad y=p^{*-1}(z+\varphi^*(z))$

の形の関係式をうる．これと，(1) によって $H^*(\Gamma)$ の環構造が定まる．(終)

root と 3 次元部分群

G をコンパクト 1-連結 Lie 群，T をその極大トーラス，$\theta_r\in \mathrm{Hom}(L(T),\boldsymbol{R})$ を root とする．このとき，第5章定理 5.19 によって，$\Gamma=\Gamma_0$ である．ここで，整格子 Γ は $\exp: L(T)\to T$ の核，Γ_0 は反転 root $\theta_r{}^*$ ($\theta_r{}^*\perp L(U_r)$，$\theta_r(\theta_r{}^*)=2$) で生成される部分群である.

補題 6.11　　$\theta_r{}^*/2\notin\Gamma=\Gamma_0$

［証明］ $\theta_r{}^*/2\in\Gamma$ と仮定する．第5章定理 6.16 によって，$\varphi\in W(G)$ があって $\varphi(\theta_r)=\alpha_i$ は単純 root になる．φ は Γ を保つから，$\alpha_i{}^*/2\in\Gamma$ となる．これは第5章定理 6.35 に反する．故に，$\theta_r{}^*/2\notin\Gamma$.　(終)

$$S^3=Sp(1)=\{q\in \boldsymbol{H}\mid |q|=1\}\supset S^1=U(1)=\{c\in\boldsymbol{C}\mid |c|=1\}$$

は 3 次元のコンパクト 1-連結 Lie 群とその極大トーラスであり，

$$L(S^3)=L(S^1)\oplus V,\quad L(S^1)=(2\pi\boldsymbol{i})\cdot\boldsymbol{R},\quad V=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{R}+\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}$$

と分解するとき，$e^{\boldsymbol{i}t}\boldsymbol{j}e^{-\boldsymbol{i}t}=\boldsymbol{j}\cos 2t+\boldsymbol{k}\sin 2t$ であるから，その root は

(6.12)　　$\theta: L(S^1)\to\boldsymbol{R}\Longleftrightarrow\theta(2\pi\boldsymbol{i}t)=2t$

で与えられる．従って，

(6.12)′ $\Gamma(S^3)=\Gamma_0(S^3)$ は $\theta^*=2\pi \boldsymbol{i}$ で生成される． $W(S^3)$ は $\boldsymbol{j}$ の類 $\varphi=[\boldsymbol{j}]$ で生成され，$L(S^1)$ への作用は $\varphi(\boldsymbol{i}t)=-\boldsymbol{i}t$ で与えられる．

定理 4.7, 補題 4.8 および (4.4.6) より，

(6.13) $X\in L(U_r)$ かつ $X\notin L(U_s)$ $(s\neq r)$ のとき，G_X は T を含む $l+2$ 次元の連結な閉部分群で $Z(U_r)_0$ と一致する．

定理 6.14 G (1-連結) の各 root θ_r に対して，Lie 群の単射準同型

$$\lambda_r : S^3 \longrightarrow G$$

が存在して，$\lambda_r(S^1)=\lambda_r(S^3)\cap T$ をみたし，(6.13) の $G_X=Z(U_r)_0$ は $\lambda_r(S^3)$ と T で生成され，$\theta=\theta_r\circ d\lambda_r : L(S^1)\to L(T)\to \boldsymbol{R}$ が成り立つ．また，$\lambda_r(\boldsymbol{j})$ の類 $\varphi_r \in W(G)$ は $\theta_r=0$ に関する鏡映を与える．

［証明］ $L(G)=L(T)\oplus\sum_{i=1}^{m} V_i$ において，$L(G_X)=L(T)\oplus V_r$ である．$\theta_r{}^*$で張られる直線 L_0 について，$L(T)=L_0\oplus L(U_r)$．$L(U_r)$ 上で $\theta_r=0$ であるから，$L(G_X)=(L_0+V_r)\oplus L(U_r)$ は Lie 環の直和分解を与える．L_0+V_r は A_1-型であるから，$L(S^3)$ と同型である．よって，$\lambda_r : S^3\to G_X$ が存在して，$l-1$ 次元トーラス $T_r=\exp L(U_r)=(U_r)_0$ について，$\lambda_r\times 1 : S^3\times T_r\to G$ は局所同型であり，$\theta=\theta_r\circ d\lambda_r$ となるようにできる．S^3 の中心は $-1=\exp(\theta^*/2)$ で，λ_r によって $\exp(\theta_r{}^*/2)$ に写される．補題 6.11 によって，$\lambda_r(-1)\neq e$. これはλ_rが単射であることを示している．その他は容易にわかる．($\lambda_r\times 1$ の核は 0 または $\boldsymbol{Z}_2$ で，$\boldsymbol{Z}_2$ の場合は S^3, T_r のいずれの部分群でもない．) (終)

系 6.15 λ_r は同相 $\bar{\lambda}_r : S^3/S^1\cong Z(U_r)_0/T$ を誘導する．

反転 root $\theta_r{}^*$ を，原点と $\theta_r{}^*$ を結ぶ道の exp による像の類 $\in\pi_1(T)=H_1(T)$ と同一視すれば $\Gamma_0=H_1(T)$ である．また，root $\theta_s : L(T)\to\boldsymbol{R}$ は，その制限 $\theta_s|\Gamma : \Gamma=\Gamma_0\to\boldsymbol{Z}$ によって，$H^1(T)=\mathrm{Hom}(H_1(T),\boldsymbol{Z})$ の元とみなす．

補題 6.16 (1) $\theta_s\in H^1(T)$ は $\theta_s(\theta_r{}^*)=\dfrac{2(\theta_s,\theta_r)}{(\theta_r,\theta_r)}$ をみたす．

(2) $\lambda_r{}^* : H^1(T)\to H^1(S^1)$ は $\lambda_r{}^*(\theta_s)=\dfrac{2(\theta_s,\theta_r)}{(\theta_r,\theta_r)}t$ をみたす．ここで，t は $\theta/2$ で表わされる $H^1(S^1)$ の生成元である．

［証明］ $\theta_s=a\theta_r+Y$, $Y\perp\theta_r$, と分解すれば，$a=\dfrac{(\theta_s,\theta_r)}{(\theta_r,\theta_r)}$である．このとき，$Y(\theta_r{}^*)=0$, $\theta_r(\theta_r{}^*)=2$ より (1) がえられる．定理 6.14 より，$\lambda_r{}^*(\theta_s)=\theta_s\circ d\lambda_r=a(\theta_r\circ d\lambda_r)=Y\circ d\lambda_r=a\theta$. (6.12) より，$\theta/2$ は $H^1(S^1)$ の生成元である． (終)

$S^3/S^1=S^2$ であるから，定理 6.14 より，転入 τ, τ_r に関する次の可換図式をうる：

$$\text{(6.17)}\quad \begin{array}{ccc} H^1(T) & \xrightarrow{\lambda_r{}^*} & H^1(S^1) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_r} & & \cong\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ H^2(S_r{}^2) & \xrightarrow[\cong]{\bar{\lambda}_r{}^*} & H^2(S^2) \end{array} \qquad (S_r{}^2=Z(U_r)_0/T\cong S^2)$$

系 6.18 $H^2(S_r{}^2)\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元 u_r を $\bar{\lambda}_r{}^*(u_r)=\tau(t)$, $t=[\theta/2]$, で与えるとき，

$$\tau_r(\theta_s)=\frac{2(\theta_s, \theta_r)}{(\theta_r, \theta_r)}u_r$$

随伴作用に関する K-サイクルのコホモロジー環

以下，$K=G$ はコンパクト 1-連結，K の作用は G または $\mathfrak{g}=L(G)$ への随伴作用とする．また，測地線分 s は定理 4.16，定理 4.15 または定理 4.20 における様な極大トーラス T の Lie 環 $\mathfrak{t}=L(T)$ 上の線分とする．s の例外点は $D(G)$ または $D'(G)$ との交点であり，s の終点はその近傍で適当にとりかえることができるから，s は次のようにとれる：

(6.19) s の例外点は $D(G)$ または $D'(G)$ の超平面との交点であり，その例外点を通る超平面は唯 1 つである．s の終点は正則点である．

このとき，s に対応する K-サイクルは：

(6.20) $\Gamma_s=(K_1\times\cdots\times K_n)/T^n$，ただし例外点 $x_i=s(t_i)$ を通る超平面が $\theta_i=n_i\in\boldsymbol{Z}$ で与えられるとき，$K_i=Z(U_i)_0$ である．

定理 6.8 の切断 σ をもつバンドルを考える：

$$\text{(6.20)}'\qquad S_1{}^2=Z(U_1)_0\xrightarrow{i}\Gamma_s\xrightarrow{p}\Gamma'=(K_2\times\cdots\times K_n)/T^{n-1}$$

定理 6.21 (1) (6.19) の条件をみたす s に対する K-サイクル Γ_s は 1-連結な $2n$ 次元可符号多様体で，

$$H^*(\Gamma_s)=\Delta(x_1, \cdots, x_n),\quad x_i\in H^2(\Gamma_s)$$

(2) 定理 4.16 における，基本 Weyl 領域 $\mathscr{F}$ に含まれる各 Weyl 胞体 Δ に対して，原点と Δ の点を結ぶ線分 s は (6.19) をみたすようにとることができる．このような s 全体について，$\gamma_s=f_{s*}(\Gamma_s)\in H_{2\nu(\Delta)}(\Omega G)$ は $H_*(\Omega G)$ の自由アーベル群の基底をなす．

(3) 定理 4.20 において，$Q\in W(G)\cdot X$ と R を結ぶ線分 s は (6.19) をみたし，$\gamma_s=f_{s*}(\Gamma_s)\in H_{2\nu(Q)}(\Omega(\mathfrak{g}, G/Z(T')))\cong H_{2\nu(Q)}(G/Z(T'))$ 全体は，$H_*(G/Z$

$(T'))$ の自由アーベル群の基底をなす．

［証明］ (1) 帰納法を(6.20)′ のバンドルに用いて容易にえられる(補題6.10参照)．

(2), (3)は定理6.7(2)より容易にえられる． (終)

定理 6.22 $\Gamma_s=(K_1\times\cdots\times K_n)/T^n$ において，$K_i=Z(U_i)_0$ となるように root θ_i の番号を(重複を許して)選ぶとき，Γ_s のコホモロジー環は

$$H^*(\Gamma_s)=\boldsymbol{Z}[x_1, \cdots, x_n]/(\rho_1, \cdots, \rho_n)$$

で与えられる．ただし，生成元 $x_i\in H^2(\Gamma_s)$ は帰納的に，$1<i\leq n$ のとき，Γ' で与えられた $x_i\in H^2(\Gamma')$ について $x_i=p^*(x_i)$ で，x_1 は補題6.10(1)により $\sigma^*(x_1)=0$ および $i^*(x_1)=u_1$ が系6.18の生成元となるように，定められる．また，ρ_i は次の式で与えられる：

$$\rho_i=x_i\left\{x_i+\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2(\theta_i, \theta_j)}{(\theta_j, \theta_j)}x_j\right\}$$

注意 6.22′ この定理は後で使わないので，その証明を略する(補題6.16参照)．Bott-Samelson はこの式を使って，$H^*(G_2/T)$ の構造や $\pi_i(E^l)$ $(l=6, 7, 8)$ が $i>3$ の範囲でどこまで消えるかということ，あるいは，$\pi_{10}(G_2)\cong\boldsymbol{Z}_3$ であること等を示した．しかし，環構造の計算が面倒なので本書で取扱うには適当ではない．

定理 6.23 G はコンパクト1-連結単純 Lie 群，$\tilde{\alpha}$ を dominant root, θ_r を1つの root とする．定理6.14の単射準同型 $\lambda_r: S^3\longrightarrow G$ の像を $S_r{}^3=\lambda_r(S^3)$ で表わす．Weyl 群 $W(G)$ の元 φ があって，$\varphi(\theta_r)=\tilde{\alpha}$ をみたすならば，射入 $i_r: S_r{}^3\longrightarrow G$ は同型 $i_{r*}: \pi_3(S_r{}^3)\cong\pi_3(G)$ を誘導する．

［証明］ φ の作用 $\varphi: G\to G$ は内部自己同型で与えられ，G は連結であるから，$\varphi\simeq 1_G$ である．$\tilde{\alpha}$ に対する定理6.14の写像を $\tilde{\lambda}: S^3\to G$ とするとき，$\varphi\circ\lambda_r=\tilde{\lambda}\Longrightarrow\lambda_r\simeq\tilde{\lambda}$ であるから，$\theta_r=\tilde{\alpha}$ のときに示せばよい．

$\varDelta_0$ を基本 Weyl 胞体とすると，$\mathscr{F}$ の中にある $\varDelta_0$ の面は超平面 $\tilde{\alpha}=1$ の中にある．この超平面での $\varDelta_0$ の鏡像を $\varDelta$ とすると，原点と $\varDelta$ の内点を結ぶ線分 s で定まる $\gamma_s=f_{s*}[\Gamma_\varDelta]$ は $H_2(\Omega G)\cong\pi_2(\Omega G)\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元である．明らかに $\Gamma_\varDelta=S^2$ で，$f_s: S^2\to G$ は $\pi_2(\Omega G)$ の生成元を表わす．一方，$\tilde{\alpha}$ は $S_r{}^3$ $(\theta_r=\tilde{\alpha})$ の

root であるから，$f_s(S^2)\subset S_r{}^3\cdot T$. 故に $\pi_2(\Omega(S_r{}^3\cdot T))\to\pi_2(\Omega G)$ は全射である．従って，$\pi_3(S_r{}^3\cdot T)\to\pi_3(G)$ も全射．$(S_r{}^3\cdot T)/S_r{}^3$ はトーラスで，そのホモトピー群 $\pi_i=0\ (i\neq 1)$ であるから，$\pi_3(S_r{}^3)\cong\pi_3(S_r{}^3\cdot T)$. これらの合成は i_{r*} で，$\boldsymbol{Z}$ と同型な群の間の全射であるから，同型である．　　(終)

補題 6.24　$E_l\ (l=6,7,8)$ の Weyl 群は root の集合に推移的に作用する．

［証明］　第5章(6.26)の root 系を見れば，$\alpha_i=e_{i-1}-e_{i-2}$ に対応する鏡映 φ_i は e_{i-1} と e_{i-2} の互換として作用する．$\alpha_2=e_1+e_2$ に対応する φ_2 は $(e_1,e_2)\mapsto(-e_2,-e_1)$ と写し，α_1 に対応する φ_1 は $\varphi_1(e_2-e_1)=\dfrac{1}{2}(-e_1+e_2-e_3-\cdots-e_7+e_8)$，$\varphi_1(e_8-e_7)=\dfrac{1}{2}(-e_1+e_2+\cdots+e_6-e_7+e_8)$ をみたす．これらのことから，$W(E_l)$ は root 系に推移的に作用することがわかる．　　(終)

系 6.25　$E_l\ (l=6,7,8)$ の任意の root に対する部分群 $S_r{}^3=\lambda_r(S^3)$ の射入 i_r : $S_r{}^3\longrightarrow G$ は $\pi_3(G)$ の生成元を表わす．

§7　例外群の閉道空間とホモトピー群

例外群 F_4, G_2

記号　$\mathcal{R}(G)=\{G$ の root　$\pm\theta_1,\cdots\pm\theta_m\}$

$\mathcal{R}_+(G)=\{G$ の正 root　$\theta_1,\cdots,\theta_m\}$

G' を G の最大階数の閉部分群とするとき，第5章§7のように

(7.1)　$\mathcal{R}_+(G')=\{\mathcal{R}_+(G)$ に属する G' の root$\}\subset\mathcal{R}_+(G)$

とみることができる．

定理 7.2　G をコンパクト1-連結 Lie 群，G' を G の1-連結閉部分群で最大階数をもつものとする．G の基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ に関して，

$$\lambda=\#\{\theta'\in\mathcal{R}_+(G')\,|\,\theta'(\boldsymbol{x})>\theta(\boldsymbol{x}),\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathcal{F},\ \forall\theta\in\mathcal{R}_+(G)-\mathcal{R}_+(G')\}$$

とおくとき，射入 $\Omega i:\Omega G'\to\Omega G$ で誘導される準同型

$$\Omega i_*: H_*(\Omega G')\longrightarrow H_*(\Omega G)$$

は　次数$<2(\lambda+1)$　のとき全射である．

［証明］　$\mathcal{F}$ の各 Weyl 胞体 Δ に対して，原点とその内点を結ぶ線分 s の K-サイクル Γ_Δ は可符号多様体である(定理 6.21)．定理 6.7 によって，$H_*(\Omega G)$ は K-ホモロジー類 $f_{s*}[\Gamma_\Delta]\in H_{2\lambda(s)}(\Omega G)$ を $\boldsymbol{Z}$-基底にもつ．ここで，$\lambda(s)$ は s と

交わる $D(G)$ の超平面の個数である．λ の定義から容易にわかるように，$\lambda(s)\leq 2\lambda$ ならば s と交わる $D(G)$ の超平面は $D(G)'$ の超平面である．

明らかに，G' の基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}'$ は $\mathcal{F}$ を含む．従って，$\lambda(s)\leq 2\lambda$ のときは G' に関して s の K-サイクル Γ'_Δ を作るとき，$\Gamma_\Delta=\Gamma'_\Delta$ で $f_s(\Gamma_\Delta)\subset \Omega G'$．これは Ωi_* が 次数$<2(\lambda+1)$ のとき全射であることを示している．（終）

系 7.3　定理 7.2 において，$\Omega i^*: H^*(\Omega G)\longrightarrow H^*(\Omega G')$ は 次数$<2(\lambda+1)$ のとき直和因子への単射である．

［証明］　$H_*(\Omega G)$，$H_*(\Omega G')$ は自由アーベル群である（定理 4.16）から，Ωi_* の核は 次数$<2(\lambda+1)$ のとき直和因子である．$H^*(\Omega G)=\mathrm{Hom}(H_*(\Omega G), \boldsymbol{Z})$ 等とみて，Ωi^* は Ωi_* の双対写像であるから，系がえられる．（終）

G が例外群の場合に，定理 7.2 を適用できるのは次の 2 つの場合である（第 5 章 §7 参照）．第 5 章 (6.26) の root の表示を用いる．

定理 7.4　(1)　F_4 の部分群として Spin(9) があって，

$$\mathcal{R}_+(\mathrm{Spin}(9))=\{e_i\ (1\leq i\leq 4);\ e_i+e_j,\ \ e_i-e_j\ (1\leq i<j\leq 4)\}$$

$$\mathcal{R}_+(F_4)-\mathcal{R}_+(\mathrm{Spin}(9))=\left\{\frac{1}{2}(e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)\right\}$$

(2)　G_2 の部分群として $SU(3)$ があって，

$$\mathcal{R}_+(SU(3))=\{-2e_1+e_2+e_3,\ e_1-2e_2+e_3,\ -e_1-e_2+2e_3\}$$

$$\mathcal{R}_+(G_2)-\mathcal{R}_+(SU(3))=\{e_1-e_2,\ -e_1+e_3,\ -e_2+e_3\}$$

［証明］　(1) で与えられる root 系 $\mathcal{R}(\mathrm{Spin}(9))$ は第 5 章定理 7.10 をみたすから，F_4 の部分群 G' で B_4-型のものが存在して $\mathcal{R}(\mathrm{Spin}(9))$ はその root 系である．G' はある元の正規化群としてえられ（第 5 章定理 7.16），閉部分群で Spin(9) または $SO(9)=\mathrm{Spin}(9)/\boldsymbol{Z}_2$ （$\boldsymbol{Z}_2$ は Spin(9) の中心）である．一方，$L(T)=\{(x_1, x_2, x_3, x_4)\ |\ x_i\in\boldsymbol{R}\}$ の点 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,0)$ は Spin(9)の全ての root で整数値をとるから，$\exp(\boldsymbol{e}_1)$ は Spin(9) の中心に属する．また，$\boldsymbol{e}_1$ の $\frac{1}{2}(e_1+e_2+e_3+e_4)$ による値は $\frac{1}{2}$ で整数ではないから，$\exp(\boldsymbol{e}_1)\neq 0$ である．これは $G'=\mathrm{Spin}(9)$ を示している．

(2) も同様に示され，$\exp\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)\neq 0 \Longrightarrow G'=SU(3)$．（終）

補題 7.5　(1)　$\Omega i^*: H^*(\Omega F_4)\longrightarrow H^*(\Omega\mathrm{Spin}(9))$ は 次数<10 のとき直和因子への単射．

(2)　$\Omega i^*: H^*(\Omega G_2)\longrightarrow H^*(\Omega SU(3))$ は 次数<6 のとき直和因子への単射．

［証明］ (1) F_4 の基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ は

$$x_2>x_3>x_4>0 \quad \text{および} \quad x_1>x_2+x_3+x_4$$

で与えられる．$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, x_4)\in\mathcal{F}$ の $\mathcal{R}_+(F_4)$ の root による値は

$$x_1+x_2>x_1+x_3>x_1+x_4>x_1>\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4)\geq\frac{1}{2}(x_1\pm x_2\pm x_3\pm x_4)$$

をみたすから，定理 7.2 において $\lambda\geq4$ であり，系 7.3 より (1) がえられる．

(2) G_2 の基本 Weyl 領域 $\mathcal{F}$ は，$\frac{1}{2}(x_2+x_3)>x_1>x_2$ $(x_1+x_2+x_3=0)$ で与えられ，$\mathcal{F}$ では，$-x_1-x_2+2x_3>x_1-2x_2+x_3>$ (その他の $\mathcal{R}_+(G_2)$ の root の値) が成り立ち，定理 7.2 において，$\lambda\geq2$ である． (終)

Hopf 代数の応用

補題 7.5 の状態を抽象化して，Hopf 代数の議論をしよう．

定理 7.6 A^*, B^* を体 $\boldsymbol{k}$ 上の連結 $(A^0=B^0=\boldsymbol{k},\ A^i=B^i=0\ (i<0))$ かつ可換な有限型準 Hopf 代数，$f: B^*\to A^*$ を準 Hopf 代数の準同型とする．

(1) f が次数 $<N$ で単射であれば，A^* の部分 $\boldsymbol{k}$-加群 M^* が存在して，A^* の積 μ について，$\mu\circ(f\otimes1): B^*\otimes M^*\to A^*$ は次数 $<N$ で (B^*-加群として) 同型である．従って，$B^+=\sum_{i>0}B^i$ について，次数 $<N$ の範囲で

$$A^*/(f(B^+))\cong M^* \quad (\boldsymbol{k}\text{-加群の同型})$$

(2) ファイバー空間 $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ において，B は 1-連結，$B^*=H^*(B;\boldsymbol{k})$，$A^*=H^*(E;\boldsymbol{k})$，$f=p^*$ について (1) の仮定がみたされているとき，次数 $<N$ の範囲で，i^* は同型 $H^*(E;\boldsymbol{k})/(p^*(H^+(B;\boldsymbol{k})))\cong H^*(F;\boldsymbol{k})$ を誘導し，$H^*(B;\boldsymbol{k})$-加群として $H^*(E;\boldsymbol{k})$ は $H^*(B;\boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\boldsymbol{k})$ に同型である．

［証明］ (1) 射影 $\pi: A^*\to A^*/(f(B^+))$ は $\boldsymbol{k}$-加群の全射であるから，A^* の部分加群 M^* で $\pi|M^*$ は同型なものがある．合成

$$B^*\otimes M^*\xrightarrow{f\otimes1}A^*\otimes M^*\xrightarrow{\mu}A^*\xrightarrow{\phi}A^*\otimes A^*\xrightarrow{1\otimes\pi}A^*\otimes A^*/(f(B^+))$$

によって $b\otimes m$ は $(1\otimes\pi)(\phi(f(b))\phi(m))=(1\otimes\pi)(f(b\otimes1+\cdots+1\otimes b)(m\otimes1+\cdots+1\otimes m))=f(b)\otimes\pi(m)+\sum_\alpha x_\alpha\otimes y_\alpha$ $(\deg y_\alpha<\deg m)$ に写される．これは，この合成，従って $\mu\circ(f\otimes1)$ が次数 $<N$ で単射であることを示している．一方，A^* は $f(B^*)$ と M^* で乗法的に生成されるから，$\mu\circ(f\otimes1)$ は全射である．よって (1) がえられた．

(2) はスペクトル系列

$$E_2 = H^*(B;\, \boldsymbol{k}) \otimes H^*(F;\, \boldsymbol{k}) \Longrightarrow H^*(E;\, \boldsymbol{k})$$

が次数$<N$で自明であることを示せばよい．これは$H^*(F;\, \boldsymbol{k})$の次数に関する帰納法で示すことができる．詳細は読者に委せる．　(終)

系 7.7　定理 7.6 は$\boldsymbol{k}$を$\boldsymbol{Z}$でおきかえ，A^*, B^*は自由アーベル群，fを直和因子への単射でおきかえるとき，同様に成り立つ．

［証明］　A^*, B^*を$A^*\otimes\boldsymbol{k}$，$B^*\otimes\boldsymbol{k}$でおきかえるとき，$f\otimes 1 : B^*\otimes\boldsymbol{k} \to A^*\otimes\boldsymbol{k}$は単射となるから，これに定理を適用した上で，$A^*, B^*$で考えればよい．

(終)

定理 7.8　(1)　$H^*(F_4/\mathrm{Spin}(9)) = \boldsymbol{Z}[x_8]/(x_8{}^3)$，$x_8 \in H^8$

(2)　$H^*(G_2/SU(3)) = \Lambda(x_6)$，　$x_6 \in H^6$

［証明］　(1)　F_4の型は(3, 11, 15, 23)，Spin(9) 即ち$SO(9)$の型は(3, 7, 11, 15)であるから，定理 5.5(3)によって，ΩF_4，$\Omega\mathrm{Spin}(9)$の Poincaré 級数はそれぞれ，$1+t^2+t^4+t^6+t^8+\cdots$ および $1+t^2+t^4+2t^6+2t^8+\cdots$ である．系 7.7 と補題 7.5(1)をファイバー空間

$$\Omega^2(F_4/\mathrm{Spin}(9)) \longrightarrow \Omega\,\mathrm{Spin}(9) \longrightarrow \Omega F_4$$

に適用して，次数<10で$H^*(\Omega^2(F_4/\mathrm{Spin}(9))) = \Lambda(x_6)$，がえられる．懸垂同型$H^*(\Omega^2(F_4/\mathrm{Spin}(9))) \cong H^{*+2}(F_4/\mathrm{Spin}(9))$，次数$<11$，を使って，$H^*(F_4/\mathrm{Spin}(9)) = \boldsymbol{Z}[x_8]$，次数$<12$．$\dim(F_4/\mathrm{Spin}(9)) = \dim F_4 - \dim \mathrm{Spin}(9) = 52-36=16$であるから，Poincaré 双対定理 (第 7 章定理 3.10) を用いて(1)がえられる．

(2)は同様に，G_2の型は(3,11)，$SU(3)$の型は(3,5)，$\dim(G_2/SU(3))=6$よりえられる．　(終)

注意 7.8′　$F_4/\mathrm{Spin}(9) = \Pi = S^8 \cup e^{16}$ (Cayley 平面)，$G_2/SU(3) = S^6$

補題 7.9　(1)　任意の体$\boldsymbol{k}$について，y_2を$H^2(\Omega SU(n);\, \boldsymbol{k})$の生成元とするとき，$y_2{}^{n-1} \neq 0$である．

(2)　標数$\neq 2$の体$\boldsymbol{k}$について，y_2を$H^2(\Omega\mathrm{Spin}(n);\, \boldsymbol{k})$の生成元とするとき，

$$n\text{が奇数} \Longrightarrow y_2{}^{n-1} \neq 0;\quad n\text{が偶数} \Longrightarrow y_2{}^{n-2} \neq 0.$$

(3)　$n \geq 7$のとき，次数<6の範囲で，$H^*(\Omega\mathrm{Spin}(n)) = \boldsymbol{Z}[y_2]$．

［証明］　(1)　第 4 章補題 5.5 によって，写像$f : P_{n-1}(\boldsymbol{C}) \to \Omega SU(n)$で，$f^* : H^*(\Omega SU(n);\, \boldsymbol{k}) \to H^*(P_{n-1}(\boldsymbol{C});\, \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[t]/(t^n)$が次数$=2$で同型，となるものがある．$t = f^*(y_2)$としてよいから，$f^*(y_2{}^{n-1}) = t^{n-1} \neq 0 \Longrightarrow y_2{}^{n-1} \neq 0$.

(2) n を奇数とする．第4章定理 6.23 によって，p-同値 ($p\neq 2$) $(SU(n)/SO(n))\times SO(n)\to SU(n)$ がある．従って，$\Omega(SU(n)/SO(n))\times\Omega\mathrm{Spin}(n)\to\Omega SU(n)$ も p-同値で，$H^*(\Omega SU(n);\ \boldsymbol{k})\cong H^*(\Omega(SU(n)/SO(n));\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(\Omega\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{k})$．ここで，$1\otimes y_2$ は $H^2(\Omega SU(n);\ \boldsymbol{k})$ の生成元であるから，(1)によって，$(1\otimes y_2)^{n-1}\neq 0\Longrightarrow {y_2}^{n-1}\neq 0$．$n$ が偶数のときは，$\Omega SU(n-1)$ に制限して考えればよい．

(3) 第3章定理 6.11 と第4章定理 5.10 より，$H^*(\Omega\mathbf{Spin})\cong H^*(\Omega_0\boldsymbol{SO})\cong H^*(\boldsymbol{SO}/\boldsymbol{U})\cong\boldsymbol{Z}[y_2]$，次数$<6$，である．これから(3)は容易にでる．(終)

補題 7.10 A^* を標数 $p>0$ の体上の準 Hopf 代数で $A^1=0$ なるものとする．$y_2\in A^*$ について，${y_2}^n\neq 0$ ならば，$n<p^f$ となる最小の f について，$y_2^{p^f-1}\neq 0$ である．

［証明］ y_2 は原始的である：$\phi(y_2)=y_2\otimes 1+1\otimes y_2$．$a=p^{f-1}$ とおくと，仮定から，${y_2}^a\neq 0$．a は p の巾であるから，$\phi({y_2}^a)=(y_2\otimes 1+1\otimes y_2)^a={y_2}^a\otimes 1+1\otimes{y_2}^a$．さらに，$1<i<p$ について，$\phi({y_2}^{ai})=({y_2}^a\otimes 1+1\otimes{y_2}^a)^i={y_2}^{ai}\otimes 1+iy_2^{ai-a}\otimes{y_2}^a+\cdots$．この第2項は i に関する帰納法で0でないから，${y_2}^{ai}\neq 0$ $(1\leq i<p)$．特に，$\phi(y_2^{a(p-1)})=y_2^{a(p-1)}\otimes 1-y_2^{a(p-2)}\otimes{y_2}^a-\cdots\neq 0$．また，$\phi(y_2^{ap-1})=\phi(y_2^{a(p-1)}y_2^{a-1})=y_2^{ap-1}\otimes 1+y_2^{a(p-1)}\otimes y_2^{a-1}+\cdots\neq 0\Longrightarrow y_2^{ap-1}\neq 0$．$ap-1=p^f-1$ であるから，補題がえられる．(終)

注意 この補題と定理 7.6 は次章§1の Hopf 代数の一般論のモデルである．

定理 7.11 (1) 次数<6 の範囲で，$H^*(\Omega G_2)=\boldsymbol{Z}[y_2]$．

(2) 次数<8 の範囲で，$H^*(\Omega F_4)=\boldsymbol{Z}[y_2]$．

(3) 標数$\neq 2$ の体 $\boldsymbol{k}$ について，次数<18 の範囲で，

$$H^*(\Omega F_4;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_2,y_{10},y_{14}]$$

［証明］ (1) ΩG_2 の Poincaré 級数は $1+t^2+t^4+t^6+\cdots$．補題 7.5(2) と補題 7.9(1)によって，${y_2}^2$ は $H^4(\Omega G_2)\cong\boldsymbol{Z}$ の生成元であることがわかり，(1)をうる．

(2) ΩF_4 の Poincaré 級数は $1+t^2+t^4+t^6+t^8+\cdots$．従って，任意の標数の体 $\boldsymbol{k}$ について，${y_2}^3\neq 0$ $(\in H^6(\Omega F_4;\ \boldsymbol{k}))$ を示せばよい．$\boldsymbol{k}$ の標数が2のときは補題 7.10 によって ${y_2}^2\neq 0$ を示せばよいが，このことは補題 7.5(1) と補題 7.9(3) よりえられる．$\boldsymbol{k}$ の標数が2でないときは次の(3)に含まれる．

(3)　$H^2(\Omega F_4;\ \boldsymbol{k})$ の生成元 y_2 は，補題 7.5(1) によって $H^2(\Omega \mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{k})$ の生成元 y_2' へ写される．補題 7.9(2) によって，$(y_2')^8 \neq 0 \Longrightarrow y_2{}^8 \neq 0$．$y_2$ は原始的であるから，y_2 で生成される部分環 B^* は $A^*=H^*(\Omega F_4;\ \boldsymbol{k})$ の部分 Hopf 代数で，補題 7.10 により，$B^*=\boldsymbol{k}[y_2]$ が 次数<18 の範囲で成り立つ．ΩF_4 の Poincaré 級数は $(1+t^2+t^4+\cdots+t^{16}+\cdots)(1+t^{10}+t^{14}+t^{20}+\cdots)$ であるから，定理 7.6(1) を使って (3) がえられる．（終）

定理 7.12　(1)　$i \neq 3$ かつ $i<6$ のとき，$\pi_i(G_2)=0$　$(\pi_3(G_2)\cong \boldsymbol{Z})$．

(2)　$i \neq 3$ かつ $i<8$ のとき，$\pi_i(F_4)=0$　$(\pi_3(F_4)\cong \boldsymbol{Z})$．

(3)　CW-複体 $S^{11}\cup e^{15}$ と連続写像 $f: S^{11}\cup e^{15}\longrightarrow F_4$ があって，$f_*: \pi_i(S^{11}\cup e^{15})\longrightarrow \pi_i(F_4)$ は $3<i<18$ のとき 2-成分を除いて同型である．

［証明］　(1)　$\pi_2(\Omega G_2)\cong H_2(\Omega G_2)\cong \boldsymbol{Z}$ であるから，π_2 の同型を誘導する写像 $f: \Omega G_2 \to K(\boldsymbol{Z},2)$ がある．f をファイバー空間の射影でおきかえて，そのファイバーを $\Omega\tilde{G}_2$ とするとき，ファイバー空間

$$\Omega(K(\boldsymbol{Z},2))\longrightarrow \Omega\tilde{G}_2 \longrightarrow \Omega G_2$$

がえられる．$\Omega(K(\boldsymbol{Z},2))=K(\boldsymbol{Z},1)$ は S^1 とホモトピー同値で，$\Omega\tilde{G}_2$ は 2-連結であるから，Gysin の完全系列を使って，$H^i(\Omega\tilde{G}_2)=0\ (0<i<5) \Longrightarrow H_i(\Omega\tilde{G}_2)=0\ (0<i<5)$ がえられる．Hurewicz の定理によって，$\pi_i(\Omega\tilde{G}_2)=0\ (0<i<5)$．$\Omega\tilde{G}_2$ の作り方により，$\pi_i(\Omega\tilde{G}_2)\cong \pi_i(\Omega G_2)\ (i\neq 2)$，$\pi_i(G_2)\cong \pi_{i-1}(\Omega G_2)$ であるから，(1) がえられる．

(2)　ファイバー空間 $K(\boldsymbol{Z},1)\to \Omega\tilde{F}_4 \to \Omega F_4$ を使って (1) と同様に示される．

(3)　標数 $\neq 2$ の体 $\boldsymbol{k}$ を係数とする Gysin 完全系列を使って，定理 7.11(3) より，$H^*(\Omega\tilde{F}_4;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_{10}, x_{14}]$，次数$<17$．(2) のファイバー空間は，ファイバー空間

$$K(\boldsymbol{Z},2)\longrightarrow \tilde{F}_4 \xrightarrow{\ p\ } F_4\ (\longrightarrow K(\boldsymbol{Z},3))$$

の閉道空間をとったものとして作ることができる．懸垂同型によって，$H_*(\tilde{F}_4;\ \boldsymbol{k})\cong H^*(\tilde{F}_4;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[x_{11}, x_{15}]$（次数$<18$）．$\mathcal{C}$-理論を使えば，$S^{11}\cup e^{15}$ と $\tilde{f}: S^{11}\cup e^{15}\to \tilde{F}_4$ で $\pi_i\ (i<17)$ の 2-成分を除いた同型を誘導するものの存在がわかる．$f=p\circ\tilde{f}$ とおけばよい．（終）

注意 7.12′　　$\pi_6(G_2)\cong \boldsymbol{Z}_3$，　$\pi_8(F_4)\cong \boldsymbol{Z}_2$

例外群 E_8

補題 7.13 Lie 群の準同型 $f: SU(9) \longrightarrow E_8$, $g: \mathrm{Spin}(16) \longrightarrow E_8$ が存在して π_3 の同型を誘導する．従って，

$$\Omega f^*: H^2(\Omega E_8) \cong H^2(\Omega SU(9)), \quad \Omega g^*: H^2(\Omega E_8) \cong H^2(\Omega \mathrm{Spin}(16))$$

［証明］ 第5章の定理 7.16, (7.17) によって，$A_8 = N(\exp(X_3/2)) \subset E_8$. A_8 の root θ_r に対応する $S_r{}^3 \subset A_8 \subset E_8$ を考えると，系 6.25 により，$\pi_3(S_r{}^3) \cong \pi_3(E_8) \Longrightarrow i_*: \pi_3(A_8) \to \pi_3(E_8)$ は全射．普遍被覆写像 $p: SU(9) \to A_8$ は π_3 の同型を誘導するから，$f = i \circ p$ は π_3 の全射，従って π_3 の同型を誘導する．

$D_8 = N(\exp(X_1/2))$ についても，同様にして g がえられる． （終）

定理 7.14 次数<32 の範囲で，$H^*(\Omega E_8) = \boldsymbol{Z}[y_2, y_{14}, y_{22}, y_{26}]$ または $= \boldsymbol{Z}[y_2, y_{14}, y_{22}, y_{26}, y_{28}]/(r)$, $r \equiv 2y_{28} - y_{14}^2$, $\bar{\phi}(y_{28}) \equiv y_{14} \otimes y_{14} \bmod (y_2)$

［証明］ 標数$\neq 2$ の体 $\boldsymbol{k}$ について，生成元 $y_2 \in H^2(\Omega \mathrm{Spin}(16); \boldsymbol{k})$ は $y_2{}^{14} \neq 0$ をみたす（補題 7.9 (2)）．補題 7.13 の Ωg^* によって，$H^2(\Omega E_8; \boldsymbol{k})$ の生成元 y_2 は $y_2{}^{14} \neq 0$ をみたす．さらに，補題 7.10 を使えば，

(7.14)′ $\qquad y_2{}^{16} \neq 0 \quad (\in H^{32}(\Omega E_8; \boldsymbol{k}),\ \boldsymbol{k}$ の標数 $\neq 2)$

また，標数$=2$ の体については，補題 7.9 (1) と補題 7.13 の Ωf^* によって，$y_2{}^8 \neq 0$. 補題 7.10 によって，$y_2{}^{15} \neq 0$.

以上のことから，自然な対応 $\boldsymbol{Z}[y_2] \to H^*(\Omega E_8)$ は次数 <32 で直和因子への単射である．E_8 の型は $(3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59)$ であるから，定理 7.6 によって，$M^* = \{1, y_{14}, y_{22}, y_{26}, y_{28}\}$ があって $H^*(\Omega E_8) = \boldsymbol{Z}[y_2] \otimes M^*$ が次数<32 で成り立つ．(y_2) を法として，$\phi(y_{14}) \equiv y_{14} \otimes 1 + 1 \otimes y_{14} \Longrightarrow \phi(y_{14}^2) \equiv y_{14}^2 \otimes 1 + 2y_{14} \otimes y_{14} + 1 \otimes y_{14}^2$. これは，$y_{14}^2 \neq 0 \bmod (y_2)$ で，$y_{14}^2 \equiv a y_{28} \bmod (y_2)$ とするとき，$a = \pm 1, \pm 2$ であることを示している．よって定理が示される． （終）

定理 7.15 CW-複体 $K = S^{15} \cup e^{23} \cup e^{27}$ と写像 $f: K \longrightarrow E_8$ があって，$f_*: \pi_i(K) \cong \pi_i(E_8)$ が $i \neq 3$, $i < 28$ で成り立つ．特に，$3 < i < 15$ のとき $\pi_i(E_8) = 0$ および $\pi_{15}(E_8) \cong \boldsymbol{Z}$.

［証明］ 定理 7.12 (3) の証明と同様に定理 7.14 からえられる． （終）

系 7.16 $\qquad \pi_{16}(E_8) \cong \pi_{17}(E_8) \cong \boldsymbol{Z}_2$, $\pi_{18}(E_8) \cong \boldsymbol{Z}_{24}$,

$\qquad \pi_{19}(E_8) = \pi_{20}(E_8) = 0$, $\pi_{21}(E_8) \cong \boldsymbol{Z}_2$

注意 7.16′ $\qquad \pi_{22}(E_8) = 0$, $\pi_{23}(E_8) \cong \boldsymbol{Z}$

例外群 E_6, E_7

E_6-型のコンパクト1-連結 Lie 群を E_6 で表わす．この外に $Ad(E_6)\cong E_6/\boldsymbol{Z}_3$ も E_6-型である．E_7 も同様に E_7-型のコンパクト1-連結 Lie 群を表わす．$Ad(E_7)\cong E_7/\boldsymbol{Z}_2$ も E_7-型である．($G=E_8, F_4, G_2$ の時は $Ad(G)\cong G$ であるから，このような注意は必要ない．)

補題 7.17　(1)　Lie 群の準同型 $f: SU(8)\longrightarrow E_7$，$g: \mathrm{Spin}(12)\longrightarrow E_7$ が存在して，

$$\Omega f^*: H^2(\Omega E_7)\cong H^2(\Omega SU(8)),\quad \Omega g^*: H^2(\Omega E_7)\cong H^2(\Omega\mathrm{Spin}(12))$$

(2)　Lie 群の準同型 $f: SU(6)\longrightarrow E_6$，$g: \mathrm{Spin}(10)\longrightarrow E_6$ が存在して，

$$\Omega f^*: H^2(\Omega E_6)\cong H^2(\Omega SU(6)),\quad \Omega g^*: H^2(\Omega E_6)\cong H^2(\Omega\mathrm{Spin}(10))$$

［証明］　(1)　f については，$A_7\subset E_7$ を使って補題 7.13 と同様．

E_7 は $N(\exp(\overrightarrow{0X_1}))=D_6\cdot T^1$ を含むから $D_6\cdot T^1$ に属する root を使って，$D_6\cdot T^1$ に含まれる $S_r{}^3$ がある．$\pi_i(T^1)=0$ $(i\neq 1)$ だから，射入 $D_6\subset E_7$ は π_3 の同型を誘導する．$g: \mathrm{Spin}(12)\to D_6\subset E_7$ についても同様．

(2)　E_6 は $N(\exp(\overrightarrow{0X_2}))=A_5\cdot T^1$ を含む．A_5 に属する root を使えば，$S_r{}^3\subset A_5\cdot T^1$ がえられて，f の存在がわかる．g についても，$N(\exp(\overrightarrow{0X_1}))=D_5\cdot T^1$ を使って同様に示される．　(終)

定理 7.18　(1)　次数<16 の範囲で，$H^*(\Omega E_7)=\boldsymbol{Z}[y_2, y_{10}, y_{14}]$.

奇素数 p について，$H^2(\Omega E_7; \boldsymbol{Z}_p)$ の生成元 y_2 は $y_2{}^{10}\neq 0$ をみたす．

(2)　次数<16 の範囲で，$H^*(\Omega E_6)=\boldsymbol{Z}[y_2, y_8, y_{10}, y_{14}]$.

奇素数 p について，$H^2(\Omega E_6; \boldsymbol{Z}_p)$ の生成元 y_2 は $y_2{}^8\neq 0$ をみたす．

［証明］　(1)　補題 7.9 と補題 7.17(1) の Ωf^* を使って，$y_2{}^7\not\equiv 0 \pmod 2$，$\Omega g^*$ を使って，$y_2{}^{10}\not\equiv 0 \pmod p$．従って，次数$<16$ の範囲で，$\boldsymbol{Z}[y_2]$ は $H^*(\Omega E_7)$ の直和因子で，定理 7.6 によって，前半もえられる．

(2)　同様に補題 7.17(2) の Ωf^* を使って，$y_2{}^5\not\equiv 0 \pmod 2$．補題 7.10 より，$y_2{}^7\not\equiv 0 \pmod 2$．また Ωg^* を使って，$y_2{}^8\not\equiv 0 \pmod p$．以下同様．　(終)

定理 7.19　(1)　CW-複体 $K=S^{11}\cup e^{15}$ と写像 $f: K\longrightarrow E_7$ があって，$f_*: \pi_i(K)\cong\pi_i(E_7)$ が $i\neq 3$，$i<16$ で成り立つ．特に，$3<i<11$ のとき $\pi_i(E_7)=0$，および $\pi_{11}(E_7)\cong\boldsymbol{Z}$.

(2)　CW-複体 $K=S^9\cup e^{11}\cup e^{15}$ と写像 $f: K\to E_6$ があって，$f_*: \pi_i(K)\cong$

$\pi_i(E_6)$ が $i \neq 3,\ i<16$ で成り立つ．特に，$3<i<9$ のとき $\pi_i(E_6)=0$ および $\pi_9(E_6)\cong \boldsymbol{Z}$.

［証明］ 定理 7.15 と同様.　(終)

系 7.20　$\pi_{12}(E_7)\cong \pi_{13}(E_7)\cong \boldsymbol{Z}_2$

注意 7.20′　(1)　$\pi_{14}(E_7)=0,\ \pi_{15}(E_7)\cong \boldsymbol{Z}$

(2)　$\pi_{10}(E_6)=\pi_{13}(E_6)=\pi_{14}(E_6)=0,\ \pi_{11}(E_6)\cong \pi_{15}(E_6)\cong \boldsymbol{Z},\ \pi_{12}(E_6)\cong \boldsymbol{Z}_{12}$

第7章　コンパクト Lie 群，例外群のコホモロジー

この章の前半はコンパクト Lie 群についての一般論，後半は例外群の mod p コホモロジー環の決定にあてられる．§1は Hopf 代数の一般的性質の若干と Lie 群のコホモロジー環への応用，§2は比較定理を主要手段として各種の転入定理を証明し，分類空間への応用と後半への準備をする．§3では分類空間，特性環と Weyl 群の作用の一般論である．§4では後半への準備として，コホモロジー作用素の理論，特に Steenrod 作用素の性質を述べ，Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジー環についても紹介する．§5では，まず，1-連結単純 Lie 群のコホモロジー環を求める新しい方法を述べる．この方法は例外群に対しては有効で，p-torsion の有無を判定することができる．§5の後半で奇素数 p に対する例外群の mod p コホモロジー環を決定する．§6では例外群の mod 2 コホモロジー環を全く新しい方法で決定する．

§1　Hopf 代数と H-空間のコホモロジー

連結準 Hopf 代数の構造

この節では，準 Hopf 代数 A の構造と H-空間(特に Lie 群)への応用を考える．まず，第4章§2より Hopf 代数の復習をする．

特に断らない限り，基礎環 R は $\boldsymbol{Z}$ または標数 p の体 K_p ($\boldsymbol{Z}_p$ と思ってよい) とし，**準 Hopf 代数** $A=(A,\mu,\phi)$ は，

$A=\sum_{i\geq 0} A^i$ は結合的な**積** μ と**対角写像** (**co-積**) ϕ をもつ，

A は**連結** ($A^0=R$ でその1は A の単位元) かつ**有限型**(各 A^i は有限生成)

A は**可換** ($xy\ (=\mu(x\otimes y))=(-1)^{|x|\cdot|y|}yx$, $|x|, |y|$ は次数を表わす)

とする．

特に，対角写像 $\phi: A\to A\otimes A$ は環の準同型で，$\phi(1)=1\otimes 1$ および

$$|x|>0 \Longrightarrow \phi(x)=x\otimes 1+1\otimes x+\sum_\alpha x_\alpha'\otimes x_\alpha'', \quad |x_\alpha'|, |x_\alpha''|>0$$

をみたす．また，次の定義も第4章§2にある：

A は **Hopf 代数** $\Longleftrightarrow$ 準 Hopf 代数 A の ϕ は**結合的**：$(\phi\otimes 1)\phi=(1\otimes\phi)\phi$.

ϕ は**可換** $\Longleftrightarrow$ $T\phi=\phi$ 　$(T(x\otimes y)=(-1)^{|x|\cdot|y|}y\otimes x)$.

記号　$\overline{A}=\sum_{i>0}A^i$, $\bar{\mu}: \overline{A}\otimes\overline{A}\to\overline{A}$, $\bar{\phi}: \overline{A}\to\overline{A}\otimes\overline{A}$ (μ, ϕ で誘導されるもの)

$P(A)=\mathrm{Ker}\,\bar{\phi}=\{x\in\overline{A} \mid \phi(x)=x\otimes 1+1\otimes x\}$：**原始的**な元の作る加群，

$Q(A)=\mathrm{Coker}\,\bar{\mu}=\overline{A}/\overline{A}\cdot\overline{A}$

$Q(A)$ の元(またはその代表元)は**分解不可能**な元または**生成元**，

$\overline{A}^2=\overline{A}\cdot\overline{A}$ の元は**分解可能**といわれる．

定理 1.1　A が $P(A)$ で生成される準 Hopf 代数ならば，A の対角写像 ϕ は結合的かつ可換で，A は Hopf 代数である．

［証明］　ϕ は環の準同型であるから，原始的な元に対して $(\phi\otimes 1)\phi=(1\otimes\phi)\phi$ および $T\phi=\phi$ を示せばよいが，これらは明らかである．　　(終)

定義　A は**単生成** $\Longleftrightarrow$ R-代数 A は1つの元 x, $|x|>0$, で生成される．

$x\in\overline{A}$ の**高さ** $h(x)$ $\Longleftrightarrow$ $x^{h(x)-1}\neq 0$ となる最大の正の整数 $h(x)$

(ないときは $h(x)=\infty$)．

定理 1.2　標数 p の体 K_p の上の準 Hopf 代数 A の次数正の元 x の高さ $h(x)$ は次をみたす：

(1)　$|x|$ が奇数かつ $p\neq 2$ ならば，$h(x)=2$.

(2)　$|x|$ が偶数または $p=2$ ならば，$h(x)=p^f$ $(p\neq 0)$ または $h(x)=\infty$.

特に，A が単生成ならば，その生成元 x は原始的で，$A=K_p[x]/(x^{h(x)})$.

［証明］　$|x|$：奇数 $\Longrightarrow x^2=-x^2 \Longrightarrow$ (1).

(2)は第6章補題7.10の証明と同様．　　(終)

定理 1.3　**(Hopf-Borel の定理)** 準 Hopf 代数 A の基礎環は完全体であると仮定する．単生成 Hopf 代数 B_n があって，環の同型 $\bigotimes_n B_n\cong A$ がある．

［証明］　$Q(A)$ の基底 $\{\bar{x}_i\}$ と $\bar{x}_i$ の代表元 $x_i\in A$ をとり，$|x_1|\leq|x_2|\leq\cdots$ とする．$\{x_1, \cdots, x_n\}$ で生成される A の部分環を A_n とする．明らかに，ϕ は A_n で閉じており，A_n は準 Hopf 代数で A の直和因子かつ $B_n=A_n/(A_{n-1})=A_n/A_{n-1}\cdot\overline{A}_n$ は $\bar{x}_n$ で生成される単生成 Hopf 代数である．係数環が完全体 (p 乗根

をもつ) という仮定を使えば，$\bar{x}_n$ の代表元 x_n で，$h(\bar{x}_n)=h(x_n)$ となるものの存在がわかる．$\bar{x}_n \mapsto x_n$ は単射準同型 $B_n \to A_n$ を誘導する．そのとき，合成

$$A_{n-1}\otimes B_n \xrightarrow{\text{射入}} A_n\otimes A_n \xrightarrow{\mu} A_n \xrightarrow{\phi} A_n\otimes A_n \xrightarrow{\text{射影}} A_n\otimes B_n$$

を考えると，第 6 章定理 7.6 の証明のようにこれは単射である．一方，$A_{n-1}\otimes B_n \to A_n$ は全射であるから，これは同型．n に関する帰納法で定理をうる(第 4 章定理 2.26 参照)． (終)

系 1.4 定理 1.3 において基礎体は標数 p の体 K_p とすると，次の環の同型がある：

(1) $p=0 \implies A\cong(\bigotimes_\alpha \Lambda(x_\alpha))\otimes(\bigotimes_\beta K_0[x_\beta])$，$|x_\alpha|$ は奇数，$|x_\beta|$ は偶数．

(2) $p=2 \implies A\cong(\bigotimes_\alpha K_2[x_\alpha]/(x_\alpha{}^{h(x_\alpha)}))\otimes(\bigotimes_\beta K_2[x_\beta])$，$h(x_\alpha)$ は 2 の巾．

(3) $p\neq 0, 2 \implies A\cong(\bigotimes_\alpha \Lambda(x_\alpha))\otimes(\bigotimes_\beta K_p[x_\beta])\otimes(\bigotimes_\gamma K_p[x_\gamma]/(x_\gamma{}^{h(x_\gamma)}))$，
$|x_\alpha|$ は奇数，$|x_\beta|, |x_\gamma|$ は偶数，$h(x_\gamma)$ は p の巾．

ここで，$\dim A<\infty$ ならば，$K_p[x_\beta]$ の項はない．

注意 $p=0$, $\dim A<\infty$ の場合が古典的な **Hopf の定理**である．なお，定理 1.3 における同型は必ずしも Hopf 代数としての同型ではない．これは，$\bigotimes_n B_n$ は原始的な元で生成されるが，一般の A は必ずしもそうでないことからわかる．

以後，K_p は完全体とする．

定義 A は生成元の**単純系** $\{x_1, x_2, \cdots\}$ をもつ(記号 $A=\Delta(x_1, x_2, \cdots)$) $\iff A$ は**基本単項式** $\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}\ (1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\ ;\ r\geq 0)\}$ を加群としての基底にもつ．

定理 1.5 K_2 上の準 Hopf 代数は生成元の単純系をもつ．

［証明］ 系 1.4 (2) において $\{x_\alpha{}^{2^i}, 2^i<h(x_\alpha)\ ;\ x_\beta{}^{2^j}\}$ を考えればよい．(終)

定理 1.6 $p\neq 2$ とする．K_p 上の有限次元準 Hopf 代数 A について，次の各条件は同値である：

(1) A は外積代数 $\Lambda(x_1, \cdots, x_m)$ と(環)同型，ただし，$|x_i|$ は奇数．

(2) A は生成元の単純系をもつ：$A=\Delta(x_1, \cdots, x_m)$．

(3) $\dim A=2^m$

［証明］ (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) は明らか．

［(3) $\implies$ (1)］ $p=0$ のときは系 1.4 より明らか．

$p>2$ のときも，$\dim K[x_\gamma]/(x_\gamma{}^{h(x_\gamma)})=h(x_\gamma)=p^f$ より明らか． (終)

定理 1.7　K_p 上の有限次元準 Hopf 代数 A の Poincaré 多項式が，奇数 k_i について $P(A,t)=\prod_{i=1}^{m}(1+t^{k_i})$ となるならば $A=\Lambda(x_1,\cdots,x_m)$，$|x_i|=k_i$.

［証明］　$p\neq 2$ のときは定理 1.6 より明らか．$p=2$ とする．定理 1.5 によって，$P(A,t)=\prod(1+t^{l_j})$ と書くとき，偶数の l_j が現われるのは，$h(x_\alpha)>2$ となる α のあるときである．仮定より，このような α はなく，$h(x_\alpha)=2\Longrightarrow x_\alpha{}^2=1$.　(終)

定理 1.8　$\boldsymbol{Z}$ 上の準 Hopf 代数 A が有限生成自由アーベル群であれば，

$$A=\Lambda(x_1,\cdots,x_m),\quad |x_i| \text{ は奇数}.$$

［証明］　$D^i=(A^i$ の分解可能な元の群)

$$D_p{}^i=(A^i\otimes\boldsymbol{Z}_p \text{ の分解可能な元の群})\quad(\boldsymbol{Z}_0=\boldsymbol{Q} \text{ とみなす})$$

とおく．A^i の基底 $\{y_{i,1},\cdots,y_{i,s_i},x_{i,1},\cdots,x_{i,t_i}\}$ を，適当な整数 $m_{ij}\neq 0$ に対して，$m_{ij}y_{i,j}$ が D^i の基底になるようにえらぶ．

A の階数は有限であるから $A\otimes\boldsymbol{Q}$ の階数も有限で，従って 系 1.4(1) より，

$$A\otimes\boldsymbol{Q}=\Lambda(x_1{}',\cdots,x_m{}'),\quad |x_i{}'| \text{ は奇数},\quad x_i{}'=x_i\otimes 1.$$

従って，Poincaré 多項式は　$P(A\otimes\boldsymbol{Q},t)=\prod(1+t^{|x_i{}'|})$.

$p\neq 0$ については $A\otimes\boldsymbol{Z}_p=A/pA$ で，しかも，D^i は $D_p{}^i$ へ全射に写る．$A\otimes\boldsymbol{Z}_p$ は A の対角写像 ϕ より誘導される対角写像で準 Hopf 代数となる．A は torsion をもたないから，$\dim(A^i\otimes\boldsymbol{Z}_p)=\dim(A^i\otimes\boldsymbol{Q})=\mathrm{rank}\,A^i$ であり，

$$P(A\otimes\boldsymbol{Z}_p,t)=P(A\otimes\boldsymbol{Q},t)=\prod(1+t^{|x_i{}'|}),\quad |x_i{}'| \text{ は奇数}.$$

定理 1.7 によって，$A\otimes\boldsymbol{Z}_p=\Lambda(x_{p_1},\cdots,x_{p_m})$，$|x_{p_i}|=|x_i{}'|$.

これより，$\dim D_p{}^i=\dim D_0{}^i$．$A^i$ の基底の選び方から，$s_i=\dim D_p{}^i$，$t_i=\dim(A^i\otimes\boldsymbol{Z}_p)-\dim D_p{}^i$ がすべての p で成り立つ．故に $m_{ij}=\pm 1$ であり，偶数の i について，$t_i=0$ および $\sum_{i>0}t_i=m$ がえられる．従って，A は m 個の奇数次数の生成元 $x_1,\cdots,x_m$ で生成される．$|x_i|$ は奇数$\Longrightarrow x_i{}^2=-x_i{}^2\Longrightarrow 2x_i{}^2=0$．$A$ は torsion をもたないから，$x_i{}^2=0$ で，全射 $\Lambda(x_1,\cdots x_m)\to A$ がえられる．$A\otimes\boldsymbol{Q}=\Lambda(x_1{}',\cdots,x_m{}')$ であるから，この全射は単射でもあり，同型となる．　(終)

原始的な元と生成元

定理 1.1 で見られるように，原始的な元で生成される準 Hopf 代数は ϕ が可

換な Hopf 代数である．これを**原始的生成 Hopf 代数**という．自然な対応

$$\iota: P(A)\subset \bar{A}\longrightarrow \bar{A}/\bar{A}^2=Q(A)$$

を考える．$Q(A)$ の元の代表元は A を生成するから，

(1.9)　A は原始的生成 $\Longleftrightarrow \iota: P(A)\longrightarrow Q(A)$ は全射.

補題 1.10　(1)　$(\phi\otimes 1)\phi=(1\otimes\phi)\phi \Longleftrightarrow (\bar{\phi}\otimes 1)\bar{\phi}=(1\otimes\bar{\phi})\bar{\phi}$

(2)　$A=\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ かつ各 x_i は原始的 $\Longrightarrow P(A)$ は $\{x_1, \cdots, x_m\}$ を基底にもつ.

(3)　$A=\Lambda(x_1, x_2, \cdots, x_m) \Longrightarrow \iota: P(A)\longrightarrow Q(A)$ は単射である.

［証明］　(1)　$\bar{\phi}(x)=\sum x_\alpha'\otimes x_\alpha''$ と書くとき，$(\phi\otimes 1)\phi-(\bar{\phi}\otimes 1)\bar{\phi}$ および $(1\otimes\phi)\phi-(1\otimes\bar{\phi})\bar{\phi}$ を計算すると次の値に一致し，従って(1)がえられる：

$$\sum(x_\alpha'\otimes x_\alpha''\otimes 1+x_\alpha'\otimes 1\otimes x_\alpha''+1\otimes x_\alpha'\otimes x_\alpha'')-x\otimes 1\otimes 1-1\otimes x\otimes 1-1\otimes 1\otimes x$$

(2)　$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m$, $r\geq 2$, のとき，基本単項式 $x_\alpha'\neq x_{i_1}$ につき，

$$\bar{\phi}(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r})=x_{i_1}\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_r}+\sum x_\alpha'\otimes x_\alpha''$$

となる．従って，$\bar{\phi}$ は $\{x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_r}\,;\, r\geq 2\}$ で張られる部分加群上で単射である．また，$\bar{\phi}(x_i)=0$ は自明．よって(2)がえられる.

(3)　$|x_1|\geq|x_2|\geq\cdots\geq|x_m|$ となるように生成元を並べると，(2)において $x_{i_1}\otimes x_{i_2}\cdots x_{i_r}$ の項は他の同じ次数の単項式の $\bar{\phi}$ による像には現われない．従って，分解可能な元は原始的ではなく，原始的な元は $\bar{A}^2$ を法として x_i の一次結合でなければならない．故に，(3)がえられる.　(終)

Hopf 代数が原始的生成であるための条件を考えよう.

補題 1.11　A を Hopf 代数，$x_1, \cdots, x_m$ は A の原始的な元，次数$<N$ の範囲で　$A=\Delta(x_1, \cdots, x_m)$ と仮定する．次数 N の $\bar{A}$ の任意の元 x は，分解可能な元を法としてとり直して次の式をみたすようにできる(a_{ij} は定数)：

$$\bar{\phi}(x)=\sum a_{ij}x_i\otimes x_j,\quad |x_i|+|x_j|=|x|$$

ただし，$i\neq j$ かつ $a_{ij}\neq 0$ ならば $a_{ji}=0$.

［証明］

$$\Psi=\bar{\phi}\otimes 1-1\otimes\bar{\phi},\quad \Delta_i=\Delta(x_i, \cdots, x_m)$$

とおく．$\bar{\phi}(x)\in\bar{\Delta}_1\otimes\bar{\Delta}_1$ である．補題 1.10(1) と x_i が原始的であることより，

$$\Psi(\bar{\phi}(x))=\Psi(x_i\otimes x_j)=0,\quad \bar{\phi}(x_ix_j)=x_i\otimes x_j\pm x_j\otimes x_i$$

がえられる．従って，補題を証明するには，$\bar{\phi}(A^N)\cap(\bar{\Delta}_1\otimes\bar{\Delta}_1)$ が $\{x_i\otimes x_j\}$ と $\bar{\phi}(\bar{\Delta}_1)$ で張られることをいえばよい．$\bar{\Delta}_1\otimes\bar{\Delta}_1$ は $\{x_i\otimes x_j\}$ と $\bar{\Delta}_1\otimes\bar{\Delta}_1{}^2+\bar{\Delta}_1{}^2\otimes\bar{\Delta}_1$

で張られるから，減少する i に関する帰納法によって

$$(*)_i \qquad \bar{\phi}(A^N)\cap(\bar{\Delta}_i\otimes\bar{\Delta}_i{}^2+\bar{\Delta}_i{}^2\otimes\bar{\Delta}_i)\subset\bar{\phi}(\bar{\Delta}_i)\quad(i=m,\cdots,2,1)$$

を示せばよいことがわかる．ただし，$\bar{\Delta}_i{}^2$ は $\{x_{i_1}\cdots x_{i_r}\mid i\leq i_1<\cdots<i_r\leq m;\ r\geq 2\}$ で張られる部分空間とする．$(*)_m$ は自明．$(*)_{i+1}\Longrightarrow(*)_i$ を示そう．

$\bar{\phi}(x)$ を $(*)_i$ の左辺の元とする．$\bar{\phi}(x)$ が $x_i\otimes f_0$ $(f_0\in\bar{\Delta}^2_{i+1})$ の項を含めば x を $x'=x-x_if_0$ でおきかえて，$x_i\otimes f_0$ の項を消し，$\bar{\phi}(x')$ は

$$\sum x_ig_\gamma\otimes x_ih_\gamma+x_ig\otimes x_i+x_i\otimes x_ih+f\otimes x_i+\sum x_ig_\alpha\otimes h_\alpha+\sum g_\beta\otimes x_ih_\beta+R,$$
$$f\in\bar{\Delta}^2_{i+1};\ g_\gamma, h_\gamma, g, h, g_\alpha, h_\alpha, g_\beta, h_\beta\in\bar{\Delta}_{i+1};\quad R\in\bar{\Delta}_{i+1}\otimes\bar{\Delta}^2_{i+1}+\bar{\Delta}^2_{i+1}\otimes\bar{\Delta}_{i+1}$$

となる．$\Psi(\bar{\phi}(x'))=0$，$\bar{\phi}(\bar{\Delta}_{i+1})\subset\bar{\Delta}_{i+1}\otimes\bar{\Delta}_{i+1}$ に注意し，$\Psi=\bar{\phi}\otimes 1-1\otimes\bar{\phi}$ をこの式に施して基本単項式で書き，x_i が単独で現われる項を考えると，

$$0=x_i\otimes(\sum g_\gamma\otimes x_ih_\gamma+g\otimes x_i-x_i\otimes h)+(x_i\text{ を 2 つ含むその他の項})$$
$$+\bar{\phi}(f)\otimes x_i+\sum(x_i\otimes g_\alpha\pm g_\alpha\otimes x_i)\otimes h_\alpha-\sum g_\beta\otimes(x_i\otimes h_\beta\pm h_\beta\otimes x_i)$$

よって，$\sum g_\gamma\otimes x_ih_\gamma=g=h=\sum g_\alpha\otimes h_\alpha=0$．従って $\sum g_\beta\otimes x_i\otimes h_\beta=0\Longrightarrow\sum g_\beta\otimes h_\beta=0$．故に，$\bar{\phi}(x')=f\otimes x_i+R$ かつ $\bar{\phi}(f)=0$．補題 1.10(2) は次数を制限しても成り立つから，$\bar{\phi}(f)=0$，$f\in\bar{\Delta}^2_{i+1}\Longrightarrow f=0$．結局，

$$\bar{\phi}(x')=R\in\bar{\phi}(A^N)\cap(\bar{\Delta}_{i+1}\otimes\bar{\Delta}^2_{i+1}+\bar{\Delta}^2_{i+1}\otimes\Delta_{i+1})$$

となり，$(*)_i$ は $(*)_{i+1}$ に帰着されることがわかり，証明は完了する．（終）

定理 1.12　Hopf 代数 A が奇数次数の元よりなる生成元の単純系をもつ，即ち，$A=\Delta(x_1,\cdots,x_n)$，$|x_i|$ は奇数，ならば，A は原始的生成かつ外積代数である．

［証明］　生成元 x_i を次数の順序に並べ，m に関する帰納法によって $x_1,\cdots,x_m$ は分解可能な元を法として原始的な元にとり直せることをいう．補題 1.11 によって，$\bar{\phi}(x_m)=\sum a_{ij}x_i\otimes x_j$ にとれるが，$|x_m|$ は奇数，$|x_i\otimes x_j|$ は偶数であるから，$\bar{\phi}(x_m)=0$ である．外積代数であることは，定理 1.7，定理 1.8 による．（終）

系 1.13 (Hopf-Samelson の定理)　Hopf 代数 A が奇数次数の元で生成される外積代数であれば，A は原始的生成である．

定理 1.14　A は有限生成な $\boldsymbol{Z}$ 上の Hopf 代数とする．A における ϕ によって誘導される $A/\mathrm{Tor}\,A$ の対角写像に関して，$A/\mathrm{Tor}\,A$ は原始的生成 Hopf 代数かつ奇数次数の元で生成される外積代数である．

［証明］ ϕ は $\phi(\mathrm{Tor}\,A)\subset\mathrm{Tor}(A\otimes A)=A\otimes\mathrm{Tor}\,A+\mathrm{Tor}\,A\otimes A\subset A\otimes A$ をみたすから，対角写像 ϕ' : $A/\mathrm{Tor}\,A\to(A/\mathrm{Tor}\,A)\otimes(A/\mathrm{Tor}\,A)$ を誘導し，$A/\mathrm{Tor}\,A$ は $\boldsymbol{Z}$ 上の torsion をもたない Hopf 代数となる．定理 1.8 により，$A/\mathrm{Tor}\,A$ は外積代数，定理 1.13 により原始的生成である． （終）

記号 $\xi: A\longrightarrow A \Longleftrightarrow \xi(x)=x^p$ (A は K_p 上の Hopf 代数，$p\neq 0$)

ξ は線形写像で，μ および ϕ と可換であるから，

(1.15) ξ の像 ξA は Hopf 代数で，ξ は $P(A)$ を $P(\xi A)$ の中へ写す．

定理 1.16 A を K_2 上の Hopf 代数とする．

(1) $0\longrightarrow P(\xi A)\longrightarrow P(A)\overset{\iota}{\longrightarrow}Q(A)$ は完全である．

(2) A は生成元の単純系 $\{x_1, x_2, \cdots\}$ をもち，しかもその一部が $P(A)$ の基底となる．

［証明］ (1) $P(\xi A)\subset\mathrm{Ker}\,\iota$ は明らかであるから，$\mathrm{Ker}\,\iota\subset P(\xi A)$ を示せばよい．

まず，$\overline{\xi A}=0$，即ち $x^2=0$ $(x\in\overline{A})$ の場合を考える．このとき，系 1.4 (2) によって，$A=\bigotimes_{\alpha}\Lambda(x_\alpha)$ であり，定理は $\mathrm{Ker}\,\iota=0$ を主張している．従って，分解可能な元 $x(\in\mathrm{Ker}\,\iota)$ は原始的でないことを示せばよい．

x を基本単項式 $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_n}$ $(\alpha_1<\cdots<\alpha_n,\ |x_{\alpha_1}|\leq\cdots\leq|x_{\alpha_n}|;\ n\geq 2)$ の和で表わすとき，$|x_{\alpha_n}|$ が最大なものの 1 つを考える．$\phi(x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_n})$ は項 $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_{n-1}}\otimes x_{\alpha_n}$ を含み，他の単項式からはこの項は現われない．故に，x は原始的ではない．

次に，一般の A について考え，$x\in P(A)$ は分解可能と仮定する．

$C=A/\overline{\xi A}\cdot A$ は $\overline{\xi C}=0$ をみたす Hopf 代数となり，x の C における類は原始的かつ分解可能であるから 0 となる．$B\subset A$ をその C における像が C の基底となるように選べば，$x=\sum a_i{}^2 b_i$ $(a_i\in A,\ b_i\in B)$ と書ける．$\phi(a_j{}^2 b_j)$ は項 $a_j{}^2\otimes b_j$ を含むが，$\phi(a_i{}^2)=\phi(a_i)^2$ であるから，$|b_j|$ が最大であれば他の $\phi(a_i{}^2 b_i)$，$i\neq j$，からは $a_j{}^2\otimes b_j$ は現われないことがわかる．$|b_j|>0$ ならば x は原始的ではないから，$b_i=1\Longrightarrow x=\sum a_i{}^2=(\sum a_i)^2\in\xi A\cap P(A)=P(\xi A)$．故に，$\mathrm{Ker}\,\iota\subset P(\xi A)$ が示された．

(2) 系 1.4 (2) からわかるように，$B_n\subset\xi^n A$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ をその像が $Q(\xi^n$

A) の基底となるようにとれば，B_n は互いに共通部分がなく $\cup B_n$ は A の生成元の基底となる．(1)によって，$B_n'=B_n\cap P(\xi^n A)$ は $P(\xi^n A)/P(\xi^{n+1}A)$ の基底となるように選べる．このとき，$\cup B_n'=\{x_1, x_2, \cdots\}$ は(2)の性質をみたすことは明らかである．　(終)

注意 1.16′　奇素数 p についても，K_p 上の Hopf 代数 A について $0\to P(\xi A)\to P(A)\overset{\iota}{\to}Q(A)$ は完全である．

系 1.17　定理 1.16(2) の生成元の単純系において，$x_i\in P(A)$ であり，かつ $|x_j|=2|x_i|$ となる j が存在しなければ，$x_i{}^2=0$ である．

［証明］　(1.15)によって，$x_i{}^2\in P(\xi A)\subset P(A)$．定理 1.16(2) より系をうる．　(終)

H-空間のコホモロジー

X は積 $\mu: X\times X\to X$ をもつ，孤状連結な H-空間で有限型 ($H_i(X)$ は有限生成，$\forall i$) とする．コホモロジー環 $H^*(X;R)$ は連結，可換かつ結合的である．R が体または $H_*(X;R)$ が R-自由のときは，Künneth の同型(第4章定理 2.15) $H^*(X\times X;R)\cong H^*(X;R)\otimes H^*(X;R)$ を使って，

(1.18)　$H^*(X;R)$ は $\phi=\mu^*: H^*(X;R)\to H^*(X;R)\otimes H^*(X;R)$ を対角写像とする準 Hopf 代数である．従って，この§における今迄の結果は

$$A=H^*(X;R),\quad (R=\boldsymbol{Z},\ H^*(X):\text{自由，または } R=K_p)$$

に対して，そのまま成り立つ．

(1.18)′　X がホモトピー結合的，特に $X=G$ が位相群や Lie 群のときは，$H^*(X;R)$ は Hopf 代数 ($\phi=\mu^*$ は結合的)である．

X が有限型のとき，普遍係数定理(第3章の (1.5)および(1.7))を使えば，

(1.19)　(1)　($H_n(X)$ の階数(自由部分の生成元の個数)) = ($H^n(X)$ の階数)

(2)　($H_n(X)$ の torsion 部分) $\cong$ ($H^{n+1}(X)$の torsion 部分)

であることがわかる．特に，p-torsion については次が成り立つ．

(1.20)　素数 p，標数 p の体 $\boldsymbol{k}$，有限型の X について，次の(1)～(7)は同値:

(1)　$H_*(X)$ は p-torsion をもたない．

(2)　$H^*(X)$ は p-torsion をもたない．

(3)　$H_*(X)\otimes\boldsymbol{k}\cong H_*(X;\boldsymbol{k})$

(4)　$H^*(X)\otimes \boldsymbol{k}\cong H^*(X;\ \boldsymbol{k})$

(5)　$H_*(X;\ \boldsymbol{k})\cong H^*(X;\ \boldsymbol{k})$

(5′)　$P(H_*(X;\ \boldsymbol{k}),t)=P(H^*(X;\ \boldsymbol{k}),t)$

(6)　$\dim_{\boldsymbol{k}} H_n(X;\ \boldsymbol{k})=\dim_{\boldsymbol{Q}} H_n(X;\ \boldsymbol{Q})$　$(\forall n)$

(7)　$\dim_{\boldsymbol{k}} H^n(X;\ \boldsymbol{k})=\dim_{\boldsymbol{Q}} H^n(X;\ \boldsymbol{Q})$　$(\forall n)$

(このような X は p-torsion をもたないということもある.)

X を有限型 H-空間とする. Künneth の公式

$$H^*(X\times X)\cong \mathrm{Hom}(H_*(X),H^*(X))\oplus \mathrm{Ext}(H_*(X),H^*(X))$$

における最後の項は torsion 群である. また, Hom の項はクロス積 $H^*(X)\otimes H^*(X)\to H^*(X\times X)$ に対応する. これらのことから, 同型

$$(H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X))\otimes(H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X))\cong H^*(X\times X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X\times X)$$

がえられる. $\mu^*: H^*(X)\to H^*(X\times X)$ は $H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X)$ における対角写像を誘導する. 従って,

(1.21)　有限型 H-空間 X について, $H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X)$ は準 Hopf 代数かつ自由アーベル群である.

定理 1.8, 定理 1.14 をこれに適用して次の定理がえられる.

定理 1.22　0-連結 H-空間 X において, $H_*(X)$ が有限生成であれば, 準 Hopf 代数 $H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X)$ は, 奇数次数の原始的な元 x_i で生成される外積代数 $\Lambda(x_1,\cdots,x_l)$ である. ここで, $H^*(X;\ \boldsymbol{Q})=\Lambda(x_1,\cdots,x_l)\otimes\boldsymbol{Q}$.

系 1.23　定理 1.22 において, $H_*(X)$ が p-torsion をもたないときは, $H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は奇数次数の原始的な元で生成される外積代数 $\Lambda(x_1,\cdots,x_l)$ である.

［証明］　p-torsion なし $\Longrightarrow H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\cong(H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X))\otimes\boldsymbol{Z}_p$. (終)

p-torsion のある場合でも, 次が成り立つ.

定理 1.24　p は奇素数とする. 定理 1.22 の X と l について, 準 Hopf 代数 $A=H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の系 1.4 (3) における生成元 $\{x_\alpha\}$ のうち, 奇数次数のものが少くとも l 個ある.

［証明］　定理 1.22 により $H^*(X)/\mathrm{Tor}\ H^*(X)=\Lambda(x_1,\cdots,x_l)$, $|x_i|$ は奇数. $\bar{x}_i\in H^*(X)$ を x_i の代表元とすると, $\bar{x}_1\cdots\bar{x}_l$ は $H^*(X)$ の自由な直和因子を生成する. 従って, $y_i=(\bar{x}_i \bmod p)\in H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ について, $y_1\cdots y_l\neq 0$ である.

系 1.4 によって，y_i を生成元 x_α の多項式 (x_α の巾はその高さを越えない) で表わしたとき，$|y_i|$ は奇数であるから，この多項式の各項(単項式)は奇数次数の x_α を含む．従って，$y_1\cdots y_l$ は少くとも l 個の奇数次数の x_α を含む単項式の和である．p は奇素数 $\Longrightarrow x_\alpha{}^2=0$ であるから，$y_1\cdots y_l\neq 0$ であるためには少くとも l 個の奇数次数の生成元 x_α がなければならない．　(終)

§2　比較定理と転入定理

比較定理

ファイバー空間 $F\to E\to B$ において，F, E, B のうちの 2 つのコホモロジーを知っているとき，残りのもののコホモロジーを求めるために Serre のスペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ (第 3 章参照)

$$E_2=H^*(B;\ \underline{H^*(F\,;\,R)})\Longrightarrow H^*(E;\ R)$$

が使われる．B または F のコホモロジーが簡単な場合は，Wang または Gysin の完全系列の様な比較的取扱い易いものが使えるが，一般に構造が複雑である場合には結果を予想して形式的なスペクトル系列 $\{'E_r, d_r\}$ をまず構成して，もとのスペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ とどこまで一致しているかを調べる方法が用いられる．

定義 $\{E_r=\sum E_r^{p,q}, d_r\}\,(r=2,3,\cdots)$ は **(コホモロジー) スペクトル系列**である

$\Longleftrightarrow$ 整数 p, q と $r\geq 2$ に対して，R-加群 $E_r^{p,q}$ と準同型 $d_r: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ が与えられていて，次をみたす：

(i) $d_r\circ d_r=0: E_r^{p-r,q+r-1}\xrightarrow{d_r}E_r^{p,q}\xrightarrow{d_r}E_r^{p+r,q-r+1}$

(ii) $E_{r+1}^{p,q}\cong H(E_r^{p,q})=Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$

ただし，$E_r^{p,q}$ において，$Z_r^{p,q}=\mathrm{Ker}\,d_r$,　$B_r^{p,q}=\mathrm{Im}\,d_r$.

定義　スペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ は**正値**

$\Longleftrightarrow p<0$ または $q<0$ ならば $E_r^{p,q}=0$.

ファイバー空間の (Serre の) スペクトル系列は正値なスペクトル系列である．以下，すべて正値なスペクトル系列を考える．このとき，

(2.1)　$$r>\mathrm{Max}(p, q+1)\Longrightarrow E_r^{p,q}=E_{r+1}^{p,q}=E_{r+2}^{p,q}=\cdots$$

となるから，これを $E_\infty^{p,q}$ とおく：$E_\infty^{p,q}=E_r^{p,q}\quad (r>\mathrm{Max}(p, q+1))$.

定義　$f=\{f_r^{p,q}:{}'E_r^{p,q}\longrightarrow E_r^{p,q}\}$ がスペクトル系列 $\{'E_r^{p,q}\}$，$\{E_r^{p,q}\}$ の間の**準同型**である $\Longleftrightarrow f$ は d_r と可換 $(d_r\circ f_r^{p,q}=f_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r)$ であり，$f_r^{p,q}$ は $f_{r+1}^{p,q}$ を誘導する．

(2.1)′　$f_\infty^{p,q}=f_r^{p,q}:{}'E_\infty^{p,q}\longrightarrow E_\infty^{p,q}$　$(r>\mathrm{Max}(p,q+1))$ とおく．

ここで，次の仮定をおく：

仮定 2.2　$f_2^{p,0}:{}'E_2^{p,0}\longrightarrow E_2^{p,0}$ および $f_2^{0,q}:{}'E_2^{0,q}\longrightarrow E_2^{0,q}$ がともに全射(または単射)であれば，$f_2^{p,q}:{}'E_2^{p,q}\longrightarrow E_2^{p,q}$ は全射(または単射)である．

実際に使われるのは次の場合である．

(2.2)′　${}'E_2^{p,q}\cong{}'E_2^{p,0}\otimes_R{}'E_2^{0,q}$，$E_2^{p,q}\cong E_2^{p,0}\otimes_R E_2^{0,q}$，かつこの同型によって，$f_2^{p,q}=f_2^{p,0}\otimes f_2^{0,q}$ であり，さらに，$f_2^{p,0}$, $f_2^{0,q}$ は split 準同型($\Longleftrightarrow$ 核および像が直和因子；例えば R は体)であれば，仮定 2.2 はみたされる．

ファイバー空間 $F\to E\to B$ のスペクトル系列において，局所係数環は自明，かつ $H^*(B;\ R)$ または $H^*(F;\ R)$ が R-自由有限型であれば，

(2.3)
$$E_2^{p,q}=H^p(B;\ R)\otimes H^q(F;\ R)$$

である．従って，$f_2^{p,0}$ は $H^p(B;\ R)$ の，$f_2^{0,q}$ は $H^q(F;\ R)$ の情報を与える．また，$\{f_\infty^{p,q},p+q=n\}$ は $H^n(E;\ R)$ の情報を与えるものである．

定理 2.4 (比較定理)　正値コホモロジースペクトル系列の準同型 $\{f_r^{p,q}:{}'E_r^{p,q}\longrightarrow E_r^{p,q}\}$ が仮定 2.2 をみたすとする．正整数 P,Q,N について次の命題を考える：

$(\mathrm{B})_P$：$f_2^{p,0}$ は $p<P$ のとき全単射，$p=P$ のとき単射．

$(F)_Q$：$f_2^{0,q}$ は $q<Q$ のとき全単射，$q=Q$ のとき単射．

$(\mathrm{E})_N$：$f_\infty^{p,q}$ は $p+q<N$ のとき全単射，$p+q=N$ のとき単射．

このとき，これらの命題の間に次の関係がある：

(1)　$N\le\mathrm{Min}(P,Q)$　のとき，$(\mathrm{B})_P$，$(\mathrm{F})_Q\Longrightarrow(\mathrm{E})_N$．

(2)　$P\le\mathrm{Min}(N,Q+1)$ のとき，$(\mathrm{E})_N$，$(\mathrm{F})_Q\Longrightarrow(\mathrm{B})_P$．

(3)　$Q\le\mathrm{Min}(N,P-1)$ のとき，$(\mathrm{E})_N$，$(\mathrm{B})_P\Longrightarrow(\mathrm{F})_Q$．

ただし，$f_r^{p,q}$ は $p+q\le\mathrm{Min}(P,Q+1,N)$ でのみ定義されているとしてよい．

[証明]　(1)　まず，次の(∗)が成り立つ：

(∗)　$f_r^{p,q}$ は全射かつ $f_r^{p+r,q-r+1}$ は単射 $\Longrightarrow f_{r+1}^{p,q}$ は全射かつ $f_{r+1}^{p+r,q-r+1}$ は単射．

任意の $\bar{x}\in E_{r+1}^{p,q}$ とその代表元 $x\in E_r^{p,q}$，$d_r(x)=0$，について，$f_r^{p,q}$ は全射 $\Longrightarrow$

$x=f_r(y)$ $(y\in{}'E_r^{p,q})$. $f_rd_r(y)=d_rf_r(y)=d_r(x)=0$ かつ $f_r^{p+r,q-r+1}$ は単射$\Longrightarrow d_r(y)=0$. y の類 $\bar{y}\in{}'E_{r+1}^{p,q}$ について，$f_{r+1}(\bar{y})=\bar{x}$，即ち $f_{r+1}^{p,q}$ は全射である.

$f_{r+1}^{p+r,q-r+1}$ が単射であることの証明はこれと双対的に示される.

(＊) を使えば，次の(2.4)′は $r\geq 2$ に関する帰納法で示される.

(2.4)′ $(\mathrm{B})_P$，$(\mathrm{F})_Q$ が成り立つとき，$r\geq 2$ について，

(i)$_r$ (a) $p\leq P$，$q\leq Q-r+1$ または (b) $p\leq P$，$p+q\leq Q\Longrightarrow f_r^{p,q}$ は単射，

(ii)$_r$ (c) $p\leq P-r+1$，$q<Q$ または (d) $q<Q$，$p+q<P\Longrightarrow f_r^{p,q}$ は全射.

ここで，$r=\infty$ (r：十分大)とすると，$N\leq \mathrm{Min}(P,Q)\Longrightarrow(\mathrm{E})_N$ がえられる.

(2) $P\leq 1$ のとき自明. $P\geq 1$ に関する帰納法によって，$(\mathrm{E})_{P+1}$，$(\mathrm{F})_P$，$(\mathrm{B})_P$ を仮定する．そのとき，$f_2^{P,0}$ は全射かつ $f_2^{P+1,0}$ は単射をいえばよい．まず，

(2.4)$_r''$ $r\geq q+2\Longrightarrow f_r^{P-q,q}$ は全射である ($r\geq 2$)

を示そう．$(\mathrm{E})_{P+1}$ により (2.4)$_\infty''$は正しいから，(2.4)$_{r+1}''$ を仮定して(2.4)$_r''$ を示せばよい．任意の $x\in E_r^{P-q,q}$ について，$d_r(x)\in E_r^{P-q+r,q-r+1}=0\Longrightarrow x$ の類 $[x]\in E_{r+1}^{P-q,q}$. (2.4)$_{r+1}''$ より，$[x]=f_{r+1}[y]$ $(y\in{}'E_r^{P-q,q})\Longrightarrow x=f_r(y)+d_r(z)$ $(z\in E_r^{P-q-r,q+r-1})$. $z\neq 0$ なら $P\geq q+r$，そのとき (2.4)′(ii)$_r$, (c) より，$f_r^{P-q-r,q+r-1}$ は全射$\Longrightarrow z=f_r(w)$．故に，$x=f_r(y)+d_rf_r(w)=f_r(y+d_rw)$．即ち，(2.4)$_r''$ が成り立つ.

(2.4)$_2''$, $q=0$ を考えると，$f_2^{P,0}$は全射である.

$f_2^{P+1,0}$ が単射をいうには，$f_\infty^{P+1,0}$ は単射であるから，$f_{r+1}^{P+1,0}$ は単射($P+1\geq r\geq 2$)を仮定して，$f_r^{P+1,0}$ が単射：$x\in{}'E_r^{P+1,0}$，$f_r(x)=0\Longrightarrow x=0$，をいえばよい.

$f_{r+1}[x]=[f_r(x)]=0\Longrightarrow[x]=0$ であるから，$x=d_r(y)$ $(y\in{}'E_r^{P+1-r,r-1})$. $d_rf_r(y)=f_rd_r(y)=f_r(x)=0\Longrightarrow[f_r(y)]\in E_{r+1}^{P+1-r,r-1}$. (2.4)$_{r+1}''$, $q=r-1$, により，$[f_r(y)]=f_{r+1}[z]$ $(z\in{}'E_r^{P+1-r,r-1})\Longrightarrow f_r(y)=f_r(z)+d_r(w)(w\in E_r^{P+1-2r,2r-2})$. $w\neq 0$ なら $P\geq 2r-1$，そのとき (2.4)′ (ii)$_r$, (d) より，$f_r^{P+1-2r,2r-2}$ は全射$\Longrightarrow w=f_r(u)\Longrightarrow f_r(y)=f_r(z+d_r(u))$. (2.4)′(i)$_r$, (b) より，$f_r^{P+1-r,r-1}$ は単射であるから，$y=z+d_r(u)\Longrightarrow x=d_r(y)=d_r(z)+d_rd_r(u)=0$.

故に，$f_2^{P+1,0}$ は単射である.

(3) $(\mathrm{E})_{Q+1}$，$(\mathrm{B})_{Q+2}$，$(\mathrm{F})_Q\Longrightarrow f_2^{0,Q}$ は全射かつ $f_2^{0,Q+1}$ は単射，を示せばよい．これは，(2)の証明と双対的に示され，(2.4)$_r''$ に対応するものは

(2.4)$_r'''$ $r\geq p+1\Longrightarrow f_r^{p,Q+1-p}$ は単射 ($r\geq 2$)

である．詳細は読者の研究に委ねる． (終)

Borel の転入定理

$'E_\infty$ が自明である典型的なスペクトル系列の例として，

$$'E_2=\boldsymbol{k}[y]\otimes\Delta(x),\quad d_r(1\otimes x)=y\otimes 1,\quad d_r \text{ は分配的}$$

がある．ただし，次数は $|y|=r$, $|x|=r-1$ であり，$\boldsymbol{k}$ の 標数$\neq 2$ ならば r は偶数であるとする．

$$d_r(y^n\otimes 1)=0,\quad d_r(y^n\otimes x)=y^{n+1}\otimes 1$$

であるから，

$$'E_2={}'E_r,\quad 'E_{r+1}=H('E_r)\cong\boldsymbol{k},\quad 'E_\infty\cong\boldsymbol{k}$$

Künneth の公式 $H(C_1{}^*\otimes_k C_2{}^*)=H(C_1{}^*)\otimes_k H(C_2{}^*)$ によって，このようなスペクトル系列のいくつかのテンソル積もまたスペクトル系列となる．即ち，

(2.5) $'E_2=(\bigotimes_\alpha\boldsymbol{k}[y_\alpha])\otimes_k(\bigotimes_\alpha\Delta(x_\alpha))$ に d_r の分配性と

$$d_r(1\otimes x_\alpha)=y_\alpha\otimes 1,\quad |y_\alpha|=|x_\alpha|+1\ (\boldsymbol{k}\text{ の 標数}\neq 2\Longrightarrow|y_\alpha|\text{ は偶数})$$

によって，スペクトル系列 $\{'E_r, d_r\}$ が定義され，

$$'E_r=(\bigotimes_\beta\boldsymbol{k}[y_\beta])\otimes_k(\bigotimes_\beta\Delta(x_\beta))\qquad(\text{ただし，}\beta\text{ は }|y_\beta|\geq r\text{ をみたす}).$$

特に，$'E_\infty=\boldsymbol{k}$.

ここで，ファイバー空間のコホモロジースペクトル系列における転入 τ および懸垂 σ とスペクトル系列の間の関係を復習する(第3章§2).

B が 1-連結，F が 0-連結であるファイバー空間 $F\to E\xrightarrow{p}B$ のスペクトル系列 $\{E_r, d_r\}$ において，

$$H^p(B;R)=E_2^{p,0},\quad H^q(F;R)=E_2^{0,q}$$

とみなしてよい．$r>1$ について，

$$\delta^*: H^{r-1}(F;R)\longrightarrow H^r(E,F;R),\quad p^*: H^r(B;R)\longrightarrow H^r(E,F;R)$$

を考えるとき，$\delta^{*-1}(\mathrm{Im}\,p^*)$ の元 y は**転入的**，$p^{*-1}(\mathrm{Im}\,\delta^*)$ の元 x は**懸垂可能**であるという．それらの間に関係

$$\delta^*(y)=p^*(x)$$

が成り立つとき，x は y の**転入(像)**，y は x の**懸垂(像)**といい，記号

$$y=\tau(x),\qquad x=\sigma(y)$$

で表わす．τ,σ は必ずしも一意的な写像ではないことに注意する．スペクトル

系列 $\{E_r, d_r\}$ との関係は次で与えられる：

(2.6)　(1)　$y\in H^{r-1}(F;\ R)=E_2^{0,r-1}$ が転入的 $\Longleftrightarrow$ $y\in E_r^{0,r-1}(\subset E_2^{0,r-1})$.

(2)　$x\in H^r(B;\ R)=E_2^{r,0}$ が懸垂可能 $\Longleftrightarrow$ x の $E_r^{r,0}$ における類（同じ x で表わす）は $d_r : E_r^{0,r-1}\to E_r^{0,r}$ の像 $\Longleftrightarrow$ x の $E_{r+1}^{r,0}=E_\infty^{r,0}$ における類は 0.

(3)　$d_r(1\otimes y)=x\otimes 1 \Longleftrightarrow y=\tau(x) \Longleftrightarrow x=\sigma(y)$

(4)　$\tau(x)=0 \Longleftrightarrow x\in \mathrm{Im}(i^* : H^*(E;\ R)\longrightarrow H^*(F;\ R))$

記号　$\bigotimes_\alpha \boldsymbol{k}[y_\alpha]$ を単に $\boldsymbol{k}[y_\alpha]$ で表わす．$\Delta(x_\alpha), \Lambda(x_\alpha)$ 等についても同様.

定理 2.7　ファイバー空間 $F\longrightarrow E\longrightarrow B$ において，B は 1-連結かつ有限型とし，次数 $\leq N$ の範囲で $H^*(E;\ \boldsymbol{k})\cong\boldsymbol{k}$ が成り立つとする．このとき，次の (1) と (2) は同値である：

(1)　転入的な斉次の元 x_α があって，自然な対応 $\Delta(x_\alpha)\longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ は次数$<N$ で全単射，次数$=N$ で単射である.

(2)　斉次の元 y_α があって，自然な対応 $\boldsymbol{k}[y_\alpha]\longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k})$ は次数$<N+1$ で全単射，次数$=N+1$ で単射である.

ただし，x_α と y_α は $|y_\alpha|=|x_\alpha|+1>1$ をみたし，$y_\alpha=\tau(x_\alpha)$，$x_\alpha=\sigma(y_\alpha)$ で対応しているものとする．また，$\boldsymbol{k}$ の 標数$\neq 2$ ならば $|y_\alpha|$ は偶数とする.

［証明］（1）の仮定と (2.6) から，$d_r(1\otimes x_\alpha)=y_\alpha\otimes 1$，$r=|y_\alpha|$，となる y_α の存在がえられる．また，$1<r\leq N \Longrightarrow H^r(E;\ \boldsymbol{k})=0 \Longrightarrow E_\infty^{r,0}=0$. (2.6) (2) より，$|y_\alpha|\leq N$ なる y_α に対して，$d_r(1\otimes x_\alpha)=y_\alpha\otimes 1$ となる x_α が存在する．このとき，(2.5) のスペクトル系列 $\{'E_r\}$ から $\{E_r\}$ への準同型が自然に定義できるから，比較定理(定理 2.4)を使って，定理は容易に導かれる．　　(終)

系 2.8　定理 2.7 は $F=\Omega B$ または $B=BG$, $F=G$ に適用され，$H^*(E;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$ が全ての次数について成り立つ．従って，これらの B, F について，

(1)　$H^*(F;\ \boldsymbol{k})=\Delta(x_\alpha)$，$x_\alpha$ は転入的 $\Longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[\tau(x_\alpha)]$.

(2)　$H^*(B;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_\alpha]\Longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})=\Delta(\sigma(x_\alpha))$

注意 2.8′　系 2.8 (1) を **Borel の小(転入)定理**ということがある．これを応用するには x_α が転入的であることをコホモロジー作用素等を用いて示さなければならない．しかし，次の定理はそれを示す必要のない場合である.

定理 2.9 (Borel の転入定理)　定理 2.7 のファイバー空間 $F\longrightarrow E\longrightarrow B$ において，次数$\leq N+2$ の範囲で $H^*(E;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}$ であり，

奇数次数の元 $x_i \in H^*(F;\ \boldsymbol{k})$, $|x_i| \le N$, が存在して，自然な対応

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_l) \longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

は，次数$\le N$のとき全単射，次数$=N+1$のとき単射であると仮定する．

このとき，生成元 x_i は転入的となるようにとり直すことができて，

$$\boldsymbol{k}[y_1, \cdots, y_l] \longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k}), \quad y_i = \tau(x_i)$$

は，次数$\le N+1$のとき全単射，次数$=N+2$のとき単射である．

［証明］ Nに関する帰納法で示す．$N=0$のときは自明である．Nを$N-1$でおきかえたとき定理は正しいとして，定理をNの場合に証明しよう．ここで，$0<|x_1| \le |x_2| \le \cdots \le |x_l| \le N$としてよい．

［N：偶数のとき］ $|x_i|$は奇数$\Longrightarrow |x_i| \le N-1$であるから，帰納法の仮定より，$x_1, \cdots, x_l$は転入的にとり直せる．そのとき，定理は定理2.7［(1)$\Longrightarrow$(2)］より明らかである．

［N：奇数のとき］ $|x_m| \le N-2$, $|x_{m+1}| = \cdots = |x_l| = N$とすると，

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_m) \longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

は，次数$\le N-1$のとき全単射，次数$=N$のとき単射であるから，帰納法の仮定から，$x_1, \cdots, x_m$は転入的にとり直せて，$y_i = \tau(x_i)$ $(i=1, \cdots, m)$について，$\boldsymbol{k}[y_1, \cdots, y_m] \to H^*(B;\ \boldsymbol{k})$は次数$\le N$のとき全単射，次数$=N+1$のとき単射である．従って，次数$N+1$(偶数)の元$y_{m+1}, \cdots, y_n$があって，自然な対応

$$k[y_1, \cdots, y_m, y_{m+1}, \cdots, y_n] \longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k})$$

は次数$\le N+1$で全単射となる．ここで，$N+2$は奇数であるから，この対応は次数$=N+2$で単射である．定理2.7［(2)$\Longrightarrow$(1)］によって，

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_m, \sigma(y_{m+1}), \cdots, \sigma(y_n)) \longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

は次数$\le N$で全単射である．これは，$l=n$であり，$x_{m+j} = \sigma(y_{m+j})$に生成元$x_{m+j}$をとり直せることを示している．そのとき，$y_{m+j} = \tau(x_{m+j})$となり定理の正しいことが示された．　(終)

注意　Borelの転入定理のもとのものは，スペクトル系列について代数的な形で述べてある．また，仮定は$H^*(F;\ \boldsymbol{k}) = \Lambda(x_1, \cdots, x_l)$, $|x_i| \le M$, $H^*(E;\ \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}$ (次数$\le N$, $N \ge 2M+1$)，結論は$H^*(B;\ \boldsymbol{k}) = \boldsymbol{k}[y_1, \cdots, y_l]$ (次数$\le N$)となっているが，応用上は定理2.9と大差はない．

分類空間への応用

G を Lie 群，$\gamma=(EG, p, BG, G)$ を普遍 G-バンドルとするとき，CW-複体(と同じホモトピー型をもつ空間) X を底空間とする G-バンドル $\xi=(E_\xi, p, X, G)$ の同値類と，$\xi=f^\# \gamma$ をみたす写像 $f: X \to BG$ のホモトピー類とは1対1対応にある(第2章定理6.6参照)．いま，斉次の元

$$c \in H^n(BG;\ R), \qquad n>0$$

に対して，元

$$c(\xi)=f^*(c) \in H^n(X;\ R)$$

は f のとり方に無関係に定まる．また，G が F に効果的に作用するとき，ξ の同伴バンドル ξ_F：(E, p, X, F, G) についても，元

$$c(\xi_F)=c(\xi) \in H^n(X;\ R)$$

が，c に対して定まる．

定義　$c(\xi)=c(\xi_F)$ を c に対応する ξ(または ξ_F)の**特性類**という．

第3章の Chern 類，symplectic Pontrjagin 類，Stiefel-Whitney 類，Pontrjagin 類，Euler 類に対して，対応する古典群を構造群にもつバンドルの特性類は同じ名称でよばれる．また，多様体 M の接バンドル τ_M の特性類 $c(\tau_M)$ を M の**特性類**という．

(2.10)　特性類 $\{c(\xi)\}$ は次の性質で特徴づけられる：ξ および η をそれぞれ CW-複体 X および Y 上の G-バンドル(またはその同伴バンドル)とする．写像 $f: Y \longrightarrow X$ について，

$$f^\#\xi \equiv \eta \text{ (同値) ならば } f^*(c(\xi))=c(\eta)=c(f^\#\xi).$$

もちろん，この特性類は $c=c(\gamma) \in H^n(BG;\ R)$ に対応するものである．

以下では，バンドルの底空間は CW-複体(と同じホモトピー型をもつ空間)とする．

定義　$x \in H^n(G;\ R)$, $n>0$, は**普遍転入的** $\Longleftrightarrow$ 任意の G-バンドル $\xi=(E_\xi, p, X, G)$ に関して x は転入的．

転入の自然性($\Longleftrightarrow$(2.10)の f に対して，$f^*(\tau(x))=\tau(x)$) より，次のことがわかる：

(2.11)　$x \in H^n(G;\ R)$ は普遍転入的 $\Longleftrightarrow$ 普遍 G-バンドル $\gamma=(EG, p, BG, G)$ において，x は転入的．

定理 2.12 G はコンパクト連結 Lie 群，R は $\boldsymbol{Z}$ または標数 p の体 $\boldsymbol{k}$ とする．$H_*(G)$ は $R=\boldsymbol{Z}$ のときは torsion をもたず，$R=\boldsymbol{k}$ が標数 $p\neq 0$ の体のときは p-torsion をもたないと仮定する．そのとき，普遍転入的な元 $x_i \in H^{n_i}(G;R)$ があって，

$$H^*(G;\ R)=\Lambda(x_1, \cdots, x_l), \quad |x_i|=n_i \text{ は奇数},$$
$$H^*(BG\,;R)=R[y_1, \cdots, y_l], \quad y_i=\tau(x_i)$$

ここで，次数の列 $(n_1, \cdots, n_l)$ は G の型 ($R=\boldsymbol{Q}$ に対するもの) である．

［証明］ 定理 1.22 および系 1.23 より，$H^*(G;\ R)=\Lambda(x_1, \cdots, x_l)$，$|x_i|$ は奇数．これに定理 2.7 ($N=\infty$) を適用して，定理がえられる． (終)

系 2.12′ 1-連結位相空間 X において，$H_*(\Omega X)$ が有限生成であるときは，定理 2.12 は，$G=\Omega X$，$BG=X$ とおきかえて成り立つ．

系 2.13 $H_*(G)$ は p-torsion をもたない $\Longrightarrow H_*(BG)$ は p-torsion をもたない．

第 3 章においては，古典群 G の個々の場合について G や BG のコホモロジーを求めたが，p-torsion のない場合には，上の定理で統一的に議論される．また，例外群の様に具体的に計算できない場合にもこの定理は有用である．

定理 2.14 $R=\boldsymbol{Z}$ または $R=\boldsymbol{k}$ は標数 $p\neq 0$ の体とする．コンパクト連結 Lie 群 G に関する次の各条件は同値である：

(1) $H_*(G)$ は torsion をもたない ($R=\boldsymbol{Z}$ のとき)，または p-torsion をもたない ($R=\boldsymbol{k}$：標数 p の体のとき)．

(2) $H^*(G;\ R)$ は奇数次数の元で生成される外積代数．

(3) $H^*(BG;\ R)$ は偶数次数の元で生成される多項式環．

［証明］ ［(1) $\Longrightarrow$ (3)］は定理 2.12,［(3) $\Longrightarrow$ (2)］は系 2.8 (2) による．

［(2) $\Longrightarrow$ (1)］ まず，定理 2.9 によって，(3) がえられる．$H^*(BG;\ R)$ は偶数次数の元のみより成るから，$H^*(BG;\ R)$ は torsion (または p-torsion) をもたない．従って，$H^*(BG;\ \boldsymbol{Q})$ は $H^*(BG;\ R)$ と同様な (同じ次数の) 生成元をもつ多項式環である．系 2.8 (2) によって，$H^*(G;\ \boldsymbol{Q})$ は $H^*(G;\ R)$ の生成元と同じ次数の生成元をもつ外積代数となる．(1.10)［(7) $\Longrightarrow$ (1)］より (1) をうる． (終)

閉道空間への応用

(2.5) で考えたスペクトル系列とは逆に，ファイバーに対応する $E_2^{0,*}$ が多項式環である場合を考え，

$$'E_2=\Delta(x)\otimes \boldsymbol{k}[y],\quad d_r(1\otimes y)=x\otimes 1,\qquad d_r \text{ は分配的}$$

としよう．ただし，$|y|$ は偶数とする．

$$d_r(x\otimes y^n)=0,\quad d_r(1\otimes y^n)=n(x\otimes y^{n-1}),\quad 'E_r={}'E_2$$

であるから，$'E_{r+1}=H('E_r)$ を計算して次がえられる：

(2.15)　(1)　$\boldsymbol{k}$ の標数$=0$ のとき，$'E_\infty=\boldsymbol{k}$,

　(2)　$\boldsymbol{k}$ の標数 $p\neq 0$ のとき，全次数$<p|y|$ の範囲で $'E_\infty=\boldsymbol{k}$.

このようなスペクトル系列と (2.5) の形のスペクトル系列のテンソル積としてえられるスペクトル系列を用いると，次の定理が比較定理から導かれる．

定理 2.16　$\boldsymbol{k}$ は標数 p の体，X は有限型の 1-連結位相空間とする．$H^*(X;\boldsymbol{k})$ における，奇数次数の元 x_α と偶数次数の元 x_β' があって，自然な対応

$$\Delta(x_\alpha)\otimes \boldsymbol{k}[x_\beta']\longrightarrow H^*(X;\ \boldsymbol{k})$$

が，次数$\leq N$ のとき全単射，次数$=N+1$ のとき単射であると仮定する．

$$M=\begin{cases}\mathrm{Min}(N-1,p(|x_\alpha|-1)-2) & (p\neq 0 \text{ のとき})\\ N-1 & (p=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

とするとき，懸垂像 $\sigma(x_\alpha),\sigma(x_\beta')\in H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})$ について，自然な対応

$$\boldsymbol{k}[\sigma(x_\alpha)]\otimes\Delta(\sigma(x_\beta))\longrightarrow H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})$$

は，次数$\leq M$ のとき全単射，次数$=M+1$ のとき単射である．

この定理の逆の型の定理は一般にはわからないが，X が H-空間であれば次のことが成り立つ．

定理 2.17　$\boldsymbol{k}$ は標数 $p\neq 0$ の体，X は有限型の 1-連結 H-空間とする．$H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})$ において偶数次数の元 y_α と奇数次数の元 y_β' があって，

$$\text{次数}<N \text{ の範囲で，} H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_\alpha]\otimes\Delta(y_\beta')$$

が成り立つとする．y_α, y_β' を転入的な元にとりかえることができて，

$$\text{次数}\leq \mathrm{Min}(N,\ p|y_\alpha|-2,\ p(|y_\beta|+1)-2) \text{ の範囲で次が成り立つ：}$$

$$H^*(X;\ \boldsymbol{k})=\Delta(x_\alpha)\otimes\boldsymbol{k}[x_\beta'],\quad x_\alpha=\tau(y_\alpha),\quad x_\beta'=\tau(y_\beta')$$

［証明］　定理 1.3 (系 1.4) によって，次数$\leq\mathrm{Min}(p|x_\delta'|-1)$ の範囲で $H^*(X;\boldsymbol{k})=\Delta(x_\gamma)\otimes\boldsymbol{k}[x_\delta']$ と表わされる．定理 2.16 により，次数$\leq\mathrm{Min}(p|x_\delta'|-2,$

$p(|x_\gamma|-1)-2)$ の範囲で，$H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[\sigma(x_\gamma)]\otimes\Lambda(\sigma(x_\delta'))$ が成り立つ．$y_\alpha=\sigma(x_\gamma)$，$y_\beta'=\sigma(x_\delta')$ とおきかえ，仮定と比較して定理がえられる．（終）

注意　$p=2$ の場合，この定理は懸垂同型を示しているに過ぎない．もう少し高い次数の結果をうるには，定理 2.28 が使われる．

定理 2.17′　定理 2.17 において，$\boldsymbol{k}$ を標数 0 の体とすれば，

次数$\leq N$ の範囲で，$H^*(X;\ \boldsymbol{k})=\Lambda(x_\alpha)\otimes\boldsymbol{k}[x_\beta']$ となる．

主ファイバー空間におけるスペクトル系列

$F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ を主ファイバー空間とする．即ち，F は H-空間で E に（右から）作用し，F における積を μ，作用を $\bar{\mu}$ とするとき，次の図式は可換である：

$$(2.18)\qquad \begin{array}{ccccc} F\times F & \xrightarrow{i'} & E\times F & \xrightarrow{p'} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\mu}} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ F & \longrightarrow & E & \xrightarrow{p} & B \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} i'=i\times 1_F \\ p' : E\times F \xrightarrow{\text{射影}} E \xrightarrow{p} B \end{array}\right)$$

$G\to EG\to BG$，$H\to G\to G/H$，$\Omega X\to PX\to X$ および，$\Omega X\to\Omega(X,A)\to A$ は主ファイバー空間の例である．

B は 1-連結，F は有限型，$\boldsymbol{k}$ は体として，(2.18) の下の列に関するコホモロジースペクトル系列を $\{E_r, d_r\}$：

$$E_2=H^*(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(E;\ \boldsymbol{k})$$

とする．(2.18) の上の列は，下の列と自明なファイバー空間 $F\xrightarrow{1_F}F\to *$ （1 点）とで構成されるから，そのスペクトル系列 $\{'E_r, 'd_r\}$

$$'E_2=H^*(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F\times F;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(E\times F;\ \boldsymbol{k})$$

は，Künneth の同型によって，

$$(2.19)\qquad 'E_r=E_r\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k}),\quad 'd_r=d_r\otimes 1$$

で与えられることがわかる．

また，$\bar{\mu}$ はスペクトル系列の間の準同型

$$\bar{\mu}_r{}^* : E_r\longrightarrow 'E_r=E_r\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})\quad \Big(E_r^{p,q}\longrightarrow \sum_{a+b=q} E_r^{p,a}\otimes H^b(F;\boldsymbol{k})\Big)$$

を誘導し，次がみたされる：

(2.20)　(1)　$\bar{\mu}_r{}^*\circ d_r=(d_r\otimes 1)\circ\bar{\mu}_r{}^*$，　$\bar{\mu}_{r+1}^*=H(\bar{\mu}_r{}^*)$

(2)　$\bar{\mu}_2{}^*=1\otimes\mu^* : H^*(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})$

$$\longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

(3)　$\bar{\mu}^*: H^*(E;\ \boldsymbol{k}) \longrightarrow H^*(E;\ \boldsymbol{k}) \otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ は $\bar{\mu}_\infty{}^*$ を誘導する．

補題 2.21　主ファイバー空間のスペクトル系列において，積

$$E_r^{p,0} \otimes E_r^{0,q} \longrightarrow E_r^{p,q} \quad (r \geq 2)$$

は単射である．

［証明］　$f \in E_r^{0,q} \subset E_2^{0,q}$，$b \in E_2^{p,0} \to E_r^{p,0}$ (全射)に対して，その積の $\bar{\mu}_r{}^*$ による像を考えるとき，(2.20) より，$\bar{\mu}_r{}^*(b \cdot f)$ は $\bar{\mu}_2{}^*(b \cdot f) = (b \otimes 1) \cdot \mu^*(f) = b \otimes f + \cdots + b \cdot f \otimes 1$ で表わされる．この第1項をとり，

$$E_r^{p,0} \otimes E_r^{0,q} \xrightarrow{\text{積}} E_r^{p,q} \xrightarrow{\bar{\mu}_r{}^*} \sum_{a+b=q} E_r^{p,a} \otimes H^b(F;\ \boldsymbol{k}) \longrightarrow E_r^{p,0} \otimes H^q(F;\ \boldsymbol{k})$$

を考えると，これは単射である．故に，積は単射である．　(終)

主ファイバー空間における転入定理

定義　$H^*(B;\ \boldsymbol{k})$ の斉次の元 $\{b_1, \cdots, b_m\}$ が (次数 $\leq N$ の範囲で) **正則列**
$\Longleftrightarrow$ 次の条件 (α), (β)をみたす：

(α)　$0 < |b_1| \leq |b_2| \leq \cdots \leq |b_m|\ \ (\leq N)$

(β)　$1 \leq i \leq m$ について，b_i との積をとる対応

$$b_i \cdot : H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(b_1, \cdots, b_{i-1}) \longrightarrow H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(b_1, \cdots, b_{i-1})$$

は(次数 $\leq N$ の範囲で)単射である．

b_i が $x_i \in H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ の転入像 $b_i = \tau(x_i)$ で与えられているときは，$\tau(x_i)$ の代表元 b_i について正則列であることをもって，転入像 $\{\tau(x_1), \cdots, \tau(x_m)\}$ は**正則列**であるということとする．

定理 2.22　ファイバー空間 $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$ において，B は1-連結，F は0-連結かつ有限型とする．転入的な元 $x_\alpha, x_\beta \in H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ があって，自然な対応 $\Delta(x_\alpha) \otimes \Delta(x_\beta) \to H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ は次数 $<N$ のとき全単射，次数 $=N$ のとき単射であり，$\tau(x_\alpha) = 0$，かつ $H^*(B;\ \boldsymbol{k})$ において $\{\tau(x_\beta)\}$ は正則列であると仮定する．

このとき，$i^*(\bar{x}_\alpha) = x_\alpha$ となる $\bar{x}_\alpha \in H^*(E;\ \boldsymbol{k})$ があって，次が成り立つ：

次数 $<N$ の範囲で，$H^*(E;\ \boldsymbol{k}) = \mathrm{Im}\,\pi^* \otimes \Delta(\bar{x}_\alpha)$，$\mathrm{Im}\,i^* = \Delta(x_\alpha)$，

次数 $\leq N$ の範囲で，$\mathrm{Im}\,\pi^* \cong H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\beta))$．

［証明］　まず，${}'E_2 = H^*(B;\ \boldsymbol{k}) \otimes (\Delta(x_\beta) \otimes \Delta(x_\alpha))$ から，$d_r(H^*(B;\ \boldsymbol{k}) \otimes 1) = 0$，$d_r(1 \otimes x_\alpha) = 0$，$d_r(1 \otimes x_\beta) = 0\ \ (r \leq |x_\beta|)$，$d_r(1 \otimes x_\beta) = \tau(x_\beta) \otimes 1\ (r = |x_\beta| + 1)$ と d_r の分配性を使って，スペクトル系列 $\{{}'E_r\}$ を構成する．このとき，

(2.23)　$'E_r=H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\beta);\ |x_\beta|<r-1)\otimes\Delta(x_\beta;\ |x_\beta|\geq r-1)\otimes\Delta(x_\alpha)$

であり，自然な対応によってスペクトル系列の準同型 $\{f_r^{p,q}: 'E_r^{p,q}\to E_r^{p,q}\}$ が誘導される．ただし，$\{E_r\}$ は定理のファイバー空間に対する $\boldsymbol{k}$ を係数とするコホモロジースペクトル系列である．

実際，$'E_{r+1}=H('E_r)$ を計算するには，x_β を次数の順序に並べて，$|x_\beta|=r-1$ である各 β について，$A=H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_{\beta'})\ ;\ \beta'<\alpha)\otimes\Delta(x_\beta)$ における d_r を計算すればよい．正則列の仮定から，$H(A,d_r)=H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_{\beta'});\ \beta'\leq\beta)\otimes 1$ となるから，(2.23) の前半がえられる．後半は自明である．

$\{f_r^{p,q}\}$ に比較定理 2.4(1) $(P=\infty,\ Q=N)$ を適用して，$(E)_N$，即ち

$$f_\infty=\sum f_\infty^{p,q}: 'E_\infty=(H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\beta)))\otimes\Delta(x_\alpha)\longrightarrow E_\infty$$

は $p+q<N$ のとき全単射，$p+q=N$ のとき単射であることがわかる．

$\mathrm{Im}\,\pi^*$ は $E_\infty^{*,0}$ と同一視され，π^* は全射 $H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\beta))\to\mathrm{Im}\,\pi^*$ を誘導するから，次数 $\leq N$ の範囲で，$\mathrm{Im}\,\pi^*\cong H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\beta))$ である．また，$\mathrm{Im}\,i^*$ は $E_\infty^{0,*}$ と同一視され，$'E_\infty^{0,*}=1\otimes\Delta(x_\alpha)$ であるから，次数 $<N$ の範囲で $\mathrm{Im}\,i^*=\Delta(x_\alpha)$．さらに，$D^{*,q}\supset\mathrm{Im}\pi^*\cdot(\Delta(\bar{x}_\alpha)$ の次数 q の部分$)$，$D^{*,q}/D^{*,q-1}\cong E_\infty^{*,q}$ であることから，次数 $<N$ の範囲で，$H^*(E;\ \boldsymbol{k})=\mathrm{Im}\,\pi^*\otimes\Delta(\bar{x}_\alpha)$ であることがわかる．　(終)

上の定理で，x_α, x_β を転入的にとれるという仮定の成立は一般にはわからないが，主ファイバー空間の場合には，次の定理によって転入的にとれることを帰納的に調べられることがある．

定理 2.24　定理 2.22 のファイバー空間 $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{\pi}B$ は主ファイバー空間であるとし，次の仮定をおく：

次数 $\leq N$ の範囲で，$H^*(F;\ \boldsymbol{k})=\Delta(x_\gamma)$，$|x_\gamma|\leq N$，

$|x_\gamma|<N$ ならば，x_γ は転入的，かつ $\{\tau(x_\gamma)\mid|x_\gamma|<N,\ \tau(x_\gamma)\neq 0\}$ は $H^*(B;\ \boldsymbol{k})$ の正則列である．

このとき，次数 N の生成元 x_γ を適当にとりかえることによって，次が成り立つ：

x_γ は転入的で，$\{x_\delta\}=\{x_\gamma\mid\tau(x_\gamma)=0\}$ とするとき，

次数 $\leq N$ の範囲で，$\mathrm{Im}\,i^*=\Delta(x_\delta)$，

$i^*(\bar{x}_\delta)=x_\delta$ について，

次数$\leq N$の範囲で，$H^*(E;\ \boldsymbol{k})=\mathrm{Im}\,\pi^*\otimes\Delta(\bar{x}_\delta)$ ($\mathrm{Im}\,\pi^*$-加群として)，

次数$\leq N+1$の範囲で，$\mathrm{Im}\,\pi^*\cong H^*(B;\ \boldsymbol{k})/(\tau(x_\gamma))$.

［証明］　$\{x_\alpha\}=\{x_\gamma \mid \tau(x_\gamma)=0,\ |x_\gamma|<N\}$，$\{x_\beta\}=\{x_\gamma \mid \tau(x_\gamma)\neq 0,\ |x_\gamma|<N\}$とおけば，定理 2.22 の仮定がみたされ，(2.23) の $f_r^{p,q}: {}'E_r^{p,q}\to E_r^{p,q}$ が考えられる．(2.4)$'$ で $P=\infty$，$Q=N$ とおいて，$f_r^{p,q}$ は $p+q\leq N$ のとき単射，$q<N$ のとき全射であることがわかる．$f_r^{p,q}$ は $f_r^{p,0}\otimes f_r^{0,q}$ に補題 2.21 の積をつづけてえられる．$p\leq N$, $q\leq N$ のとき，$f_r^{p,0}$, $f_r^{0,q}$ は単射であるから，補題 2.21 によって，$f_r^{p,q}$ も単射である．よって，

(2.24)$'$　$f_r^{p,q}: {}'E_r^{p,q}\to E_r^{p,q}$ は $p\leq N$ かつ $q<N$ のとき全単射である．

$|x_\gamma|=N$ のとき，$d_r(1\otimes x_\gamma)\neq 0$ となる最小の $r\geq 2$ を考え，$r\leq N$ とする．$d_r(1\otimes x_\gamma)\in E_r^{r,N-r+1}$ が $f_r^{r,N-r+1}$ による $d_r({}'E_r^{0,N})$ の像に入らないときは，$f_{r+1}^{r,N-r+1}$ は単射でなく，(2.24)$'$に矛盾する．故に，${}'E_r^{0,N}\subset {}'E_2^{0,N}\subset\Delta(x_\gamma;|x_\gamma|<N)$ を法として x_γ をとり直して，$d_r(1\otimes x_\gamma)=0$ にとれる．これを繰り返して，$d_r(1\otimes x_\gamma)=0$ $(2\leq r\leq N)$，即ち，x_γ は転入的にとり直せる．

このようにして，全ての x_γ は転入的としてよい．さらに，$\{\tau(x_\gamma) \mid |x_\gamma|=N\}$ のうち，一次独立な最大数のものを考えると，残りの x_γ ($|x_\gamma|=N$) はそれらを法としてとり直して $\tau(x_\gamma)=0$ にとれる．

以上の様に，$|x_\gamma|=N$ となる x_γ をとり直して，$\{x_\delta\}=\{x_\gamma|\tau(x_\gamma)=0\}$, $\{x_\varepsilon\}=\{x_\gamma|\tau(x_\gamma)\neq 0\}$ とおけば，x_γ は転入的かつ $\{\tau(x_\varepsilon)\}$ は 次数$\leq N+1$ の範囲で正則列である．また，自然な射入

$$\Delta(x_\delta)\otimes\Delta(x_\varepsilon)\longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

は 次数$\leq N$ で全単射．系 1.4 の形から，この射入は全ての次数で単射であることがわかる．故に，スペクトル系列 $\{E_r\}$ を計算して(定理 2.22 の証明参照)定理がえられる．　(終)

この定理は，(2.15) (2) のスペクトル系列を使って次の様に一般化される．

定理 2.25　定理 2.24 の仮定を次でおきかえる：次数$\leq N$の範囲で，

$H^*(F;\ \boldsymbol{k})=\Delta(x_\gamma)\otimes\boldsymbol{k}[y_\lambda]\otimes\boldsymbol{k}[y_\nu]$,　$(N+2)/p<|y_\nu|\leq N$,

$|x_\gamma|<N$ である x_γ および y_ν は転入的，$y_\lambda=i^*\bar{y}_\lambda$,

$H^*(B;\ \boldsymbol{k})=B^*\otimes\Delta(\tau(y_\nu))$ となる $\tau(x_\gamma)$ を含む部分環 B^* があり，

$\{\tau(x_\gamma) \mid \tau(x_\gamma)\neq 0,\ |x_\gamma|<N\}$ は B^* の正則列．

このとき，定理 2.24 の結論は，次の様におきかえて成り立つ：

$\mathrm{Im}\, i^*=\varDelta(x_\delta)\otimes \boldsymbol{k}[y_\lambda]$, $\quad H^*(E;\ \boldsymbol{k})=\mathrm{Im}\,\pi^*\otimes\varDelta(\bar{x}_\delta)\otimes\boldsymbol{k}[\bar{y}_\lambda]$ (次数$\leq N$),

および，$\mathrm{Im}\,\pi^*\cong B^*/(\tau(x_\gamma))$ (次数$\leq N+1$).

対角写像とスペクトル系列の微分

主ファイバー空間 $F\to E\to B$ (B は 1-連結，F は 0-連結かつ有限型) の体 $\boldsymbol{k}$ を係数とするスペクトル系列 $\{E_r\}$:

$$E_2=H^*(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(E;\ \boldsymbol{k})$$

における微分 $d_r: E_r^{0,q}(\subset E_2^{0,q}\cong H^q(F;\ \boldsymbol{k}))\to E_r^{r,q-r+1}$ と，Hopf 代数 $H^*(F;\ \boldsymbol{k})$の対角写像

$$\phi=\mu^*: H^*(F;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})$$

の間の関係をみよう．$\bar{\phi}(x)=\phi(x)-x\otimes 1-1\otimes x$ ($|x|>0$) について，

$$\bar{\phi}(x)=\sum_i x_i\otimes x_i'$$

と表わしたとき，$\{x_i'\}$ は $H^*(F;\ \boldsymbol{k})$ の基底(の 1 部)をなすようにとることとする．このとき，この $\bar{\phi}(x)$ の表示は一意的である．

定理 2.26 $x\in H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ について，$1\otimes x\in E_{r+1}^{0,q}$ と仮定するとき，$\bar{\phi}(x)=\sum_i x_i\otimes x_i'$ について次が成り立つ：

(1) $1\otimes x_i\in E_{r+1}^{0,*}$. 従って，$|x_i|<r$ ならば $x_i\in\mathrm{Im}(i^*: H^*(E;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(F;\ \boldsymbol{k}))$, $|x_i|=r$ ならば x_i は転入的である．

(2) $d_{r+1}(1\otimes x)=\sum_i y_i\otimes x_i'$ ($y_i\in H^{r+1}(B;\ \boldsymbol{k})$, $|x_i'|=q-r$) とおくとき，y_i は x_i の転入像 $\tau(x_i)=y_i$ である．

［証明］ (1) (2.20) より，$\bar{\mu}_{r+1}^*(1\otimes x)=1\otimes\mu^*(x)=1\otimes\phi(x)\in E_{r+1}^{0,*}\otimes H^*(F;\ \boldsymbol{k})$. $\{x_i'\}$ は一次独立であるから，$1\otimes x_i\in E_{r+1}^{0,*}$.

(2) (2.20) によって，$\bar{\mu}_{r+1}^* d_{r+1}(1\otimes x)=(d_{r+1}\otimes 1)(1\otimes\phi(x))=d_{r+1}(1\otimes x)\otimes 1+\sum d_{r+1}(1\otimes x_i)\otimes x_i'$ および $\bar{\mu}_{r+1}^* d_{r+1}(1\otimes x)=\bar{\mu}_{r+1}^*\sum y_i\otimes x_i'=\sum y_i\otimes\phi(x_i')$. $f\otimes 1\otimes g$ の形の項を比べて (2) がえられる． (終)

注意 2.26′ 定理 2.26 の y_i は x_i によって定まるわけではなく，転入の核を法として定まる．例えば，$x_i=0$ より $y_i=0$ を示すには，$p^*: H^{r+1}(B;\ \boldsymbol{k})\to H^{r+1}(E,F;\ \boldsymbol{k})$ が単射 ($\Longleftrightarrow E_2^{r+1,0}\cong E_{r+1}^{r+1,0}$) であればよい．

第 4 章補題 2.16 と同様にして，次がえられる．

(2.27)　$x\in H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ が転入的かつ $H^q(E;\ \boldsymbol{k})=H^{q+1}(E;\ \boldsymbol{k})=0$ ならば，x は原始的 ($\Longleftrightarrow \bar{\phi}(x)=0$) である．特に，普遍転入的ならば原始的である．

定理 2.28　X は有限型の 1-連結位相空間とする．体 $\boldsymbol{k}$ について，

$$\text{次数}\leq N\ \text{の範囲で，}\ H^*(\Omega X;\ \boldsymbol{k})=\Delta(x_\alpha),\quad |x_\alpha|\leq N$$

と仮定し，$M=\mathrm{Min}(|x_\alpha|)$ とおく．

(1)　$|x_\alpha|\leq 3M$ かつ x_α が原始的ならば，x_α は(普遍)転入的である．

(2)　1つの γ を除いて，x_β $(\beta\neq\gamma)$ は転入的，$y_\beta=\tau(x_\beta)$；$\bar{\phi}(x_\gamma)=\sum x_i'\otimes x_i''\neq 0$ において，各 x_i', x_i'' は転入的で $|x_i'|\geq|x_i''|$；$|f|+|g|=|x_\gamma|+1$ をみたす0でない $f\in\boldsymbol{k}[y_\beta]$ と $g\in\Delta(x_\alpha)$ について，$0<|f|<\mathrm{Min}|x_i'|$ ならば f は分解可能でないとする．

このとき，$\boldsymbol{k}[y_\beta]$ の元 r_γ，$|r_\gamma|=|x_\gamma|+2$，があって，次が成り立つ：

$$\text{次数}\leq N+1\ \text{の範囲で，}\ H^*(X;\ \boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_\beta]/(r_\gamma).$$

ここで，イデアル $(y_\alpha;\ |x_\alpha|<\mathrm{Max}|x_i''|)$ を法として，$r_\gamma\equiv\sum\tau(x_i')\cdot\tau(x_i'')$.

［証明］ (1)　$H^i(\Omega X;\ \boldsymbol{k})=0\ (0<i<M)\Longrightarrow H^i(X;\ \boldsymbol{k})=0\ (0<i\leq M)$．従って，$E_r^{p,q}=0$ ($0<p\leq M$ または $0<q<M$)．これから容易に，$E_2^{r+1,0}\cong E_{r+1}^{r+1,0}$ ($r\leq 2M$)．定理 2.26 (注意 2.26′) によって，$\bar{\phi}(x_\alpha)=0\Longrightarrow d_{r+1}(1\otimes x_\alpha)=0$，$r\leq 2M$．また，$2M<r<|x_\alpha|\Longrightarrow 0<q=|x_\alpha|-r<M\Longrightarrow d_{r+1}(1\otimes x_\alpha)\in E_{r+1}^{r+1,q}=0$ であるから，(1)が証明される．

(2)　$q=|x_\gamma|$，$s=\mathrm{Min}|x_i'|$ とおくと，$s+1\geq q-s+1$．定理 2.7 によって，次数$\leq q$ の範囲で，$H^*(X;\boldsymbol{k})=\boldsymbol{k}[y_\beta]$ であり，$\tau(x_\beta)$ は $\boldsymbol{k}[y_\beta]$ の分解可能な元を法として定まる．定理 2.26(2) を $r<s$ と $x=x_\gamma$ に適用して，$d_{r+1}(1\otimes x_\gamma)=\sum f\otimes g$ とすると，$f=\tau(0)$ は (2) の仮定から法は 0 で，$f=0$，即ち，$d_{r+1}(1\otimes x_\gamma)=0$，$r<s$．$r=s$ のときは，$d_{s+1}(1\otimes x_\gamma)=\sum_i\tau(x_i')\otimes x_i''\Longrightarrow d_{q-s+1}(\sum_i\tau(x_i')\otimes x_i'')=0$．これは，$r_\gamma\equiv\sum\tau(x_i')\cdot\tau(x_i'')$ をみたす関係 $r_\gamma=0$ が $H^*(X;\ \boldsymbol{k})$ で成り立つことを示している．x_β の転入性とこの x_γ に関する微分を使って，形式的スペクトル系列を作り，比較定理を用いると(2)が証明される．

（終）

注意 2.29　$|x_\gamma|\leq 3M$ のとき，r_γ の具体的な形は，$\phi(x_\gamma)=\sum x_i'\otimes x_i''$ のとき $r_\gamma=\sum(-1)^{|x_i|}\tau(x_i')\cdot\tau(x_i'')$ で与えられることが，ΩX に関する射影平面を作ることによって示すことができる．

§3　Weyl 群の作用と分類空間

Euler 標数

Euler 標数は Poincaré 多項式の変数の値を -1 ととることによってえられる．即ち，体 $\boldsymbol{k}$ 上の正値有限型有階加群 $C=\sum_{n\geq 0} C_n$ の Poincaré 級数(多項式)は

$$P(C,t)=P_{\boldsymbol{k}}(C,t)=\sum_{n\geq 0}\dim_{\boldsymbol{k}} C_n t^n$$

で与えられ，C が有限次元のときその Euler 標数は

$$\chi(C)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dim_{\boldsymbol{k}} C_n=P_{\boldsymbol{k}}(C,-1)$$

で与えられる．明らかに，

(3.1)　$P(C\oplus C',t)=P(C,t)+P(C',t),\quad P(C\otimes_{\boldsymbol{k}} C',t)=P(C,t)\cdot P(C',t)$

$\chi(C\oplus C')=\chi(C)+\chi(C'),\quad \chi(C\otimes_{\boldsymbol{k}} C')=\chi(C)\cdot\chi(C')$

C が(コ)チェイン複体のときは，その(コ)ホモロジー群 $H(C)$ について，

(3.2)　$$\chi(H(C))=\chi(C)$$

が成り立つ．(3.2)は，次の(3.2)$'$において $t=-1$ とおいてえられる．

(3.2)$'$　$P(C,t)=P(H(C),t)+(1+t)B(t)$ となる $B(t)=\sum_{n\geq 0} b_n t^n$，$b_n\geq 0$，がある．即ち，$P(C,t)>P(H(C),t)$．

C がチェイン複体のときは $b_n=\dim_{\boldsymbol{k}} \partial C_{n+1}$，コチェイン複体のときは $b_n=\dim_{\boldsymbol{k}} \delta C_{n-1}$ とおけば (3.2)$'$ がえられる(第6章補題1.20参照)．

$H_*(X)$ が有限生成であるとき，位相空間 X の Euler 標数 $\chi(X)$ は X の(コ)ホモロジー群の Euler 標数として定義される．ここで，普遍係数定理を用いると次の注意がえられる．

(3.3)　$\chi(X)=\chi(H_*(X;\boldsymbol{k}))=\chi(H^*(X;\boldsymbol{k}))$ は体 $\boldsymbol{k}$ のとり方に無関係である．

有限 CW-複体 K と $a_n=(K$ の n-胞体の数$)$ について，(3.2)，(3.3) より，

(3.3)$'$　$$\chi(K)=\sum_n(-1)^n a_n$$

定理 3.4　ファイバー空間 $F\dashrightarrow E\longrightarrow B$ において，$H_*(F), H_*(B), H_*(E)$ は有限生成とする．ある体 $\boldsymbol{k}$ について局所係数環 $H^*(F;\boldsymbol{k})$ は自明，または，B は CW-複体と(弱)ホモトピー同値ならば，次の等式が成り立つ：

$$\chi(E)=\chi(F)\cdot\chi(B)$$

［証明］　局所係数環が自明な場合には，スペクトル系列 $\{E_r\}$：

$$E_2=H^*(B;\boldsymbol{k})\otimes_{\boldsymbol{k}} H^*(F;\boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(E;\boldsymbol{k})$$

がある．$\chi(E_r)=\sum(-1)^{p+q}\dim_k E_r^{p,q}$ とおくと，(3.1) より $\chi(E_2)=\chi(B)\cdot\chi(F)$. (3.2) より $\chi(E_r)=\chi(E_{r+1})$ である．従って，$\chi(E_\infty)=\chi(B)\cdot\chi(F)$. E_∞ と $H^*(E;\boldsymbol{k})$ は $\boldsymbol{k}$ 上の有階加群として同型であるから，$\chi(E_\infty)=\chi(E)$. 故に，この場合に定理の等式がえられる．後の場合には B を CW-複体としてよい．そのとき，

$$\text{スペクトル系列}\quad E_1=C^*(B;\ \underline{H^*(F;\ \boldsymbol{k})})\Longrightarrow H^*(E;\ \boldsymbol{k})$$

があるから，同様に証明される．　　(終)

補題 3.5　$H_*(X)$ は有限生成とし，$f: H^*(X;\boldsymbol{k})\otimes_k H^*(X;\boldsymbol{k})\longrightarrow \boldsymbol{k}$ は次の性質をもつ準同型とする：斉次の元 x, y について，$f(y\otimes x)=(-1)^{|x|\cdot|y|}f(x\otimes y)$ および $|x|+|y|$ が奇数ならば $f(x\otimes y)=0$ である．$H^*(X;\boldsymbol{k})$ の斉次の元より成る基底 $\{x_i\}$ をとったとき，正方行列 $B=(f(x_i\otimes x_j))$ が正則であれば，$B^{-1}\cdot{}^tB=((-1)^{|x_i|}\delta_{ij})$ であり，これを整係数の行列とみるとき，

$$\chi(X)=\mathrm{tr}(B^{-1}\cdot{}^tB)$$

［証明］　$\mathrm{tr}(B^{-1}\cdot{}^tB)$ は基底の順序に無関係であるから，基底 $\{x_1,\cdots,x_{r+s}\}$ を $x_1,\cdots,x_r$ は偶数次数，$x_{r+1},\cdots,x_{r+s}$ は奇数次数にとって証明する．f の性質によって，$b_{ij}=f(x_i\otimes x_j)$ は $b_{ij}=b_{ji}$ $(i\leq r,\ j\leq r)$，$b_{ij}=-b_{ji}$ $(i>r,\ j>r)$，$b_{ij}=0$ ($i\leq r<j$ または $j\leq r<i$)．故に，B は次のように直和分解される：

$$B=B_1\oplus B_2,\quad {}^tB_1=B_1,\quad {}^tB_2=-B_2$$

従って，$B^{-1}\cdot{}^tB=(B_1{}^{-1}\cdot{}^tB_1)\oplus(B_2{}^{-1}\cdot{}^tB_2)=I_r\oplus(-I_s)$．また，

$$\chi(X)=\sum\dim_k H^{2k}(X;\ \boldsymbol{k})-\sum\dim_k H^{2k-1}(X;\ \boldsymbol{k})=r-s=\mathrm{tr}(B^{-1}\cdot{}^tB)\quad(\text{終})$$

注意 3.5′　補題 3.5 は $\boldsymbol{k}$ を $\boldsymbol{Z}$ でおきかえても成り立つ．また，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}$ の場合は，$\mathrm{tr}(B^{-1}\cdot{}^tB)\in\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$ であって，$\chi(X)$ に等しいわけである．

多様体の Euler 類と Poincaré 双対定理

M^n を n 次元コンパクト連結微分多様体とし，その接バンドルを

$$\tau_M=(E, p, M^n, \boldsymbol{R}^n, G),\quad G\subset GL(n,\boldsymbol{R})$$

とする．ここで，M^n は可符号かつ Riemann 計量が与えられているものとする．従って，$G\subset SO(n)$ としてよい．

0-切断 $s_0: M^n\to E$ ($\Longleftrightarrow s_0(x)=\boldsymbol{0}_x\in\boldsymbol{R}^n{}_x$) の像の補集合を $E_0=E-s_0(M^n)$ とするとき，第3章定理 3.1 によって，Thom 類 $U\in H^n(E,E_0;\ R)$ が存在して ($R=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{k}$ で，自然な $\boldsymbol{Z}\to R$ で U は対応する)，Thom 同型

$$\Phi : H^i(M^n;\ R) \cong H^{i+n}(E, E_0;\ R)\ (\Longleftrightarrow \Phi(x) = p^*(x)U)$$

がある．ここで，Thom 類 U は射入 $i_x : (\boldsymbol{R}^n{}_x, \boldsymbol{R}^n{}_x - \boldsymbol{0}_x) \to (E, E_0)$ について，$i_x{}^*(U)$ が $H^n(\boldsymbol{R}^n{}_x, \boldsymbol{R}^n{}_x - \boldsymbol{0}_x;\ R) \cong R$ の生成元となるものとして特徴づけられる．

τ_M の **Euler 類** $\chi(\tau_M)$ は射入 $j : (E, \phi) \to (E, E_0)$ と任意の切断 $s : M^n \to E$ について，

(3.6) $\chi(\tau_M) = s^* j^*(U)$ $\quad (H^n(E, E_0;\ R) \xrightarrow{j^*} H^n(E;\ R) \xrightarrow{s^*} H^n(M^n;\ R))$

で与えられる．ここで，s はホモトピー同値で，射影 p はその逆 $(s \circ p = 1_E)$ である．従って，$\Phi\chi(\tau_M) = p^* s^* j^*(U) U = j^*(U) U = U^2$，即ち，

(3.6)′ $$\chi(\tau_M) = \Phi^{-1}(U^2)$$

記号 $\varepsilon > 0$ に対して，$E(\varepsilon) = \{\boldsymbol{v} \in E \mid |\boldsymbol{v}| \leq \varepsilon\}$，$E_0(\varepsilon) = E(\varepsilon) \cap E_0$.

$E(\varepsilon) \ni \boldsymbol{v}$ に対して，$x = p(\boldsymbol{v})$ を始点とし，$\boldsymbol{v}$ を初期ベクトルとする測地線分を $\exp_x(t\boldsymbol{v})$，$0 \leq t \leq 1$，とし，写像 g を

$$g : E(\varepsilon) \longrightarrow M^n \times M^n \Longleftrightarrow g(\boldsymbol{v}) = (x,\ \exp_x(\boldsymbol{v})), \qquad x = p(\boldsymbol{v})$$

で定義する．十分小さい ε について，g は同相：$E(\varepsilon) \cong D \subset M^n \times M^n$ を与え，D は対角集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in M^n\} \subset M^n \times M^n$ の近傍である．射入

$$j_\varepsilon : (E(\varepsilon),\ E_0(\varepsilon)) \longrightarrow (E, E_0), \quad j_D : (D,\ D - \Delta) \longrightarrow (M^n \times M^n,\ M^n \times M^n - \Delta)$$

を考え，同型 ψ を次の図式の可換性で定義する：

(3.7)
$$\begin{array}{ccc} H^*(E, E_0;\ R) & \xrightarrow{\psi} & H^*(M^n \times M^n,\ M^n \times M^n - \Delta;\ R) \\ \cong \downarrow j_\varepsilon^* & & \cong \downarrow j_D{}^* \\ H^*(E(\varepsilon), E_0(\varepsilon);\ R) & \underset{\cong}{\xleftarrow{g^*}} & H^*(D, D - \Delta;\ R) \end{array}$$

射入 $k : (M^n \times M^n, \phi) \to (M^n \times M^n,\ M^n \times M^n - \Delta)$ および $k_x : M^n \to M^n \times M^n$ $(\Longleftrightarrow k_x(y) = (x, y))$ で誘導される準同型 $k^*, k_x{}^*$ について，

記号 $\overline{U} = k^* \psi(U) \in H^n(M^n \times M^n;\ R)$，$\mu = k_x{}^* \overline{U} \in H^n(M^n;\ R)$

補題 3.8 $H^n(M^n;\ R) \cong R$ であり，μ はその生成元（M^n の**基本類**）である．

［証明］ 前半はよく知られた所であり，その同型は

$$H^n(M^n;\ R) \underset{\cong}{\longleftarrow} H^n(M^n, M^n - x;\ R) \underset{\cong}{\longrightarrow} H^n(V_x, V_x - x;\ R) \cong R$$

で与えられる．ただし，V_x は $k_x(V_x) = D \cap k_x(M^n)$ で与えられる $\boldsymbol{R}^n$ に同相な x の近傍であり，上の第 2 の同型は切除同型である．

(3.7)の，左側では $\boldsymbol{R}^n{}_x$ での，右側では $k_x(M^n)=x\times M^n$ での制限を与えることによって，μ は次の対応による U の像であることがわかる(R は省略)：

$$H^n(E,E_0)\xrightarrow{i_x^*}H^n(\boldsymbol{R}^n{}_x,\boldsymbol{R}^n{}_x-\boldsymbol{0}_x)\xrightarrow[\cong]{}H^n(\boldsymbol{R}^n{}_x\cap E(\varepsilon),\boldsymbol{R}^n{}_x\cap E_0(\varepsilon))$$

$$\xleftarrow[\cong]{(k_x\circ g)^*}H^n(V_x,V_x-x)\xleftarrow[\cong]{}H^n(M^n,M^n-x)\xrightarrow[\cong]{}H^n(M^n)$$

$i_x^*(U)$ は $H^n(\boldsymbol{R}^n{}_x,\boldsymbol{R}^n{}_x-\boldsymbol{0}_x)$ の生成元であるから，後半がえられる．(終)

補題 3.9　$\{x_1=1,x_2,\cdots,x_m=\mu\}$ を $H^*(M^n;\boldsymbol{k})$ の斉次の元より成る体 $\boldsymbol{k}$ 上の基底とする．$a_{ij},b_{ij}\in\boldsymbol{k}$ を，$|x_i|+|x_j|=n$ のとき式

$$\overline{U}=\sum a_{ij}(x_i\times x_j)\quad \text{および}\quad x_ix_j=b_{ij}\mu$$

で，$|x_i|+|x_j|\neq n$ のとき $a_{ij}=b_{ij}=0$ で，定義する．このとき，等式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}=(-1)^{n|x_k|}\delta_{ik}$$

が成り立つ．特に，n が偶数ならば $A=(a_{ij})$ は $B=(b_{ij})$ の逆行列である．

［証明］　まず，$k_x^*(1\times x_j)=x_j$，$k_x^*(x_i\times x_j)=0$ $(|x_i|>0)$ であるから，

(＊)　$$a_{1m}=1,\quad a_{im}=0\quad(i>1)$$

が成り立つことが，$x_m=\mu=k_x^*\overline{U}$ よりわかる．次に，

(＊＊)　$$\overline{U}(x_k\times 1)=\overline{U}(1\times x_k)$$

を示そう．射影 $p_1,p_2:M^n\times M^n\to M^n$ $(\Longleftrightarrow p_1(x,y)=x,\ p_2(x,y)=y)$ について，$p_1^*(x_k)=x_k\times 1$，$p_2^*(x_k)=1\times x_k$ である．$\varDelta$ は D の変位レトラクトであり，$p_1|\varDelta=p_2|\varDelta$ であるから，$p_1|D\simeq p_2|D$. 従って，

$$j_D^*\circ p_1^*=j_D^*\circ p_2^*:H^*(M^n;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(M^n\times M^n;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(D;\ \boldsymbol{k})$$

$j_D^*(\psi(U)\cdot(x_k\times 1))=j_D^*(\psi(U))\cdot j_D^*p_1^*(x_k)=j_D^*(\psi(U))\cdot j_D^*p_2^*(x_k)=j_D^*(\psi(U)\cdot(1\times x_k))$. ここで，(3.7)の j_D^* は切除同型であるから，

$$\psi(U)\cdot(x_k\times 1)=\psi(U)\cdot(1\times x_k)\in H^*(M^n\times M^n,\ M^n\times M^n-\varDelta;\ \boldsymbol{k})$$

この等式に k^* を施せば(＊＊)がえられる．(＊＊)を書き直せば

$$\sum_{i,j}(-1)^{|x_j|\cdot|x_k|}a_{ij}(x_ix_k\times x_j)=\sum_{i,j}a_{ij}(x_i\times x_jx_k)$$

Künneth の同型　$\times:H^*(M^n;\boldsymbol{k})\otimes H^*(M^n;\boldsymbol{k})\cong H^*(M^n\times M^n;\ \boldsymbol{k})$ において，直和因子 $H^*(M^n;\ \boldsymbol{k})\otimes H^n(M^n;\ \boldsymbol{k})$ に属する部分を比較すると，左辺では(＊)により，$x_j=x_m=\mu$，$x_i=x_1=1$ の場合のみ残るから，

$$(-1)^{n|x_k|}(x_k\times\mu)=\sum_{i,j}a_{ij}(x_i\times x_jx_k)=\sum_i\Big(\sum_j a_{ij}b_{jk}\Big)(x_i\times\mu)$$

$\{x_i\times\mu\}$ は一次独立であるから，補題の等式がえられる．　(終)

定理 3.10 (Poincaré の双対定理)　M^n をコンパクト連結可符号微分多様体とするとき，任意の体 $\boldsymbol{k}$ に対して，同型対応

$$\varphi : H^t(M^n;\ \boldsymbol{k}) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{k}}(H^{n-t}(M^n;\ \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k})$$

が，$(\varphi(x)(y))\cdot\mu = xy$ によって定義される．従って，$\boldsymbol{k}$ 上のベクトル空間 $H^t(M^n;\ \boldsymbol{k})$，$H_t(M^n;\ \boldsymbol{k})$，$H^{n-t}(M^n;\ \boldsymbol{k})$，$H_{n-t}(M^n;\ \boldsymbol{k})$ は互いに同型である．

［証明］　$\{x_i\}$ の双対基底を $\{x_i^*\in\mathrm{Hom}(H^*(M^n;\ \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}) \mid x_i^*(x_j)=\delta_{ij}\}$ とすると，$\varphi(x_i)=\sum_j b_{ij}x_j^*$ である．補題 3.9 は行列 (b_{ij}) が正則であることを示しているから，φ は同型 $H^*(M^n;\ \boldsymbol{k})\cong\mathrm{Hom}(H^*(M^n;\ \boldsymbol{k}), \boldsymbol{k})$ を定義する．これを各次数に分けると，$b_{ij}\neq 0 \Longrightarrow |x_i|+|x_j|=n$ から，定理がえられる．（終）

注意 3.10′　定理 3.10 は微分多様体ばかりでなく，位相多様体についても成り立つ．また，$\boldsymbol{k}$ の標数が 2 であれば，非可符号の場合にも成り立つ．

系 3.11　n が奇数であれば，$\chi(M^n)=0$.

Euler 標数と Euler 類に同じ " Euler " の名を使う理由は次の定理にある．

定理 3.12　コンパクト可符号連結多様体 M^n とその接バンドル τ_M について，等式

$$\chi(M^n)\cdot\mu = \chi(\tau_M)\in H^n(M^n) \cong \boldsymbol{Z}$$

が成り立つ．ただし，基本類 μ と Euler 類 $\chi(\tau_M)$ は同じ Thom 類 U から定義されているものとする．

［証明］　$U^2\in H^{2n}(E, E_0)\cong H^n(M^n)\cong\boldsymbol{Z}$ であるから，n が奇数のときには，$U^2=-U^2 \Longrightarrow U^2=0$.　(3.6)′によって，$\chi(\tau_M)=\Phi^{-1}(U^2)=0$.　系 3.11 によって，定理は n が奇数のとき正しい．

n は偶数とする．係数環 $\boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{Q}$ に拡大するとき，$H^n(M^n)=H^n(M^n;\ \boldsymbol{Z})\to H^n(M^n;\ \boldsymbol{Q})\cong\boldsymbol{Q}$ は単射であるから，定理は $\boldsymbol{Q}$-係数で示せばよい．図式

$$\begin{array}{ccccc}
H^n(E;\ \boldsymbol{Q}) & \xleftarrow[\cong]{p^*} & H^n(M^n;\ \boldsymbol{Q}) & \xleftarrow{d^*} & H^n(M^n\times M^n;\ \boldsymbol{Q}) \\
\cong\Big\downarrow j_\varepsilon{}^* & & & & \Big\downarrow j_D{}^* \\
H^n(E(\varepsilon);\ \boldsymbol{Q}) & & \xleftarrow[\cong]{g^*} & & H^n(D;\ \boldsymbol{Q})
\end{array}$$

を考える．ただし，$d : M^n\to M^n\times M^n$ は対角写像である．この図式の上の列を除く部分は，(3.7)の対応する部分から制限によってえられる．ψ と $\overline{U}$ の定義によって，$j^* : H^n(E, E_0;\ \boldsymbol{Q})\to H^n(E;\ \boldsymbol{Q})$ について，

$$j_\varepsilon{}^*j^*(U)=g^*j_D{}^*(\overline{U})$$

であることがわかる．$s_0(M^n)$ は $E(\varepsilon)$ の変位レトラクトであり，g は $g|s_0(M^n)=d\circ p$ をみたすから，上の図式は可換である．$s\circ p=1_E\Longrightarrow p^*=s^{*-1}$ であるから，(3.6) と上のことおよび補題 3.9 の記号を使って，

$$\begin{aligned}\chi(\tau_M)&=s^*j^*(U)=p^{*-1}j^*(U)=p^{*-1}j_\varepsilon{}^{*-1}g^*j_D{}^*(\overline{U})=d^*(\overline{U})\\&=d^*\sum a_{ij}(x_i\times x_j)=\sum a_{ij}x_ix_j=\sum a_{ij}\cdot b_{ij}\cdot\mu\\&=\mathrm{tr}(A\cdot{}^tB)\cdot\mu\end{aligned}$$

補題 3.9 によって，$A=B^{-1}$．$f(x_i\otimes x_j)=b_{ij}$ で定まる f は補題 3.5 の性質を $X=M^n$，$\boldsymbol{k}=\boldsymbol{Q}$ に対してみたすから，補題 3.5 によって，

$$\chi(M^n)\cdot\mu=\mathrm{tr}(B^{-1}\cdot{}^tB)\cdot\mu=\mathrm{tr}(A\cdot{}^tB)\cdot\mu=\chi(\tau_M)\qquad\text{(終)}$$

Weyl 群の位数と p-torsion

定理 3.13　G はコンパクト連結 Lie 群，T は G の極大トーラス，U は G の最大階数連結閉部分群とするとき，

(1)　Euler 標数　$\chi(G/T)=|W(G)|$　　(Weyl 群の位数)

(2)　Euler 標数　$\chi(G/U)=[W(G):W(U)]$　(指数)

［証明］　(1)　$W(G)=N(T)/T$ であるから，これは第 5 章定理 3.14 である．

(2)　一般性を失うことなく，$G\supset U\supset T$ としてよい．ファイバーバンドル $U/T\to G/T\to G/U$ に定理 3.4 を使って，$\chi(G/T)=\chi(G/U)\chi(U/T)$．(1) により，$\chi(G/U)=\chi(G/T)/\chi(U/T)=|W(G)|/|W(U)|=[W(G):W(U)]$．

(終)

ファイバー空間 $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{\pi}B$ を考える．

補題 3.14　F, B は 0-連結，$\boldsymbol{k}$ は体とし，次の条件をみたす整数 q があるとする：

$H^j(F;\ \boldsymbol{k})=0$ $(\forall j>q)$，$i^*H^q(E;\ \boldsymbol{k})\neq0$，および局所係数 $H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ は自明．

このとき，$\pi^*: H^*(B;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(E;\ \boldsymbol{k})$ は単射である．

［証明］　ファイバー空間 $F\to E\to B$ のスペクトル系列 $\{E_r\}$ において，仮定により，

$$E_2^{i,q}=H^i(B;\ \boldsymbol{k})\otimes H^q(F;\ \boldsymbol{k}),\quad E_2^{i,j}=0\ \ (j>q),$$

および $i^*H^q(E;\ \boldsymbol{k})=D^{0,q}=E_\infty^{0,q}\subset E_2^{0,q}=1\otimes H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ に属する $1\otimes x\neq0$ があり，

$d_r(1\otimes x)=0$ $(r\geq 2)$ である．

いま，$b\in H^i(B;\ \boldsymbol{k})$ について，$b\neq 0$, $\pi^*(b)=0$ と仮定する．π^* は $E_2^{i,0}\to E_\infty^{i,0}=D^{i,0}\subset H^i(E;\ \boldsymbol{k})$ と同値であるから，$r\geq 2$ と $y\in E_2^{i-r,r-1}$ が存在して，

$$d_r(y)=b\otimes 1\neq 0\Longrightarrow d_r(y\cdot(1\otimes x))=b\otimes x$$

これは，$b\otimes x\neq 0(\in E_2^{i,q})$ はその類が $E_r^{i,q}$ に属し，$E_{r+1}^{i,q}$ においては 0 であることを示している．従って，ある $s\geq 2$ について，$b\otimes x\neq 0$ が $d_sE_s^{i-s,q+s-1}$ に属する．一方，$q+s-1>q\Longrightarrow E_s^{i-s,q+s-1}=0$ であるから，これは矛盾．故に，上のような b は存在せず，π^* は単射である． (終)

定理 3.15 $\boldsymbol{k}$ を標数 p の体，ファイバーバンドル (E,π,B,F,G) において，F はコンパクト連結可符号微分多様体，G の F への作用は C^∞ で符号を保ち，E は連結な CW-複体のホモトピー型をもつとする．このとき，$\chi(F)$ が p と素 ($p=0$ のときは $\chi(F)\neq 0$) であれば，$\pi^*:H^*(B;\ \boldsymbol{k})\to H^*(E;\ \boldsymbol{k})$ は単射である．

［証明］ $q=\dim F$ とする．$x\in B$ 上のファイバー F_x の接バンドル $T(F_x)$ の和集合 $E^*=\bigcup_x T(F_x)$ を全空間とする E 上の q 次元実ベクトルバンドルが，もとのバンドルの座標関数を使って構成される．分類定理(第 2 章定理 6.10)によって，このベクトルバンドルはある写像 $f:E\to BSO(q)$ で誘導される．従って，1 つのファイバー $F(=F_{x_0})$ とその射入 $i:F\to E$ について，F の接バンドル τ_F は $f\circ i:F\hookrightarrow E\to BSO(q)$ で誘導される．このとき，τ_F の Euler 類 $\chi(\tau_F)$ は普遍バンドルの Euler 類 $\chi\in H^q(BSO(q);\ \boldsymbol{k})$ の像である：

$$\chi(\tau_F)=(f\circ i)^*\chi=i^*f^*\chi\in H^q(F;\ \boldsymbol{k})$$

仮定と定理 3.12 より，$\chi(\tau_F)=\chi(F)\cdot\mu\neq 0\Longrightarrow i^*H^q(E;\ \boldsymbol{k})\neq 0$ かつ $i^*:H^q(E;\ \boldsymbol{k})\to H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ は全射．従って，局所係数 $H^q(F;\ \boldsymbol{k})$ は自明（第 3 章定理 4.4）．明らかに，$H^j(F;\ \boldsymbol{k})=0$ $(j>q)$．故に，補題 3.14 を使って $\pi^*:H^*(B;\boldsymbol{k})\to H^*(E;\ \boldsymbol{k})$ が単射であることがわかる． (終)

G はコンパクト連結 Lie 群，T はその極大トーラスとする．T の中心化群 $Z(T)$ は T と一致するから，第 6 章の定理 4.20(または定理 5.5(2))により，

(3.16) $H^*(G/T)$ は torsion をもたず，かつ $H^{2i+1}(G/T)=0$.

定理 3.17 Weyl 群 $W(G)$ の位数が素数 p と素ならば，$H_*(BG)$，従って $H^*(BG)$ は p-torsion をもたない．

［証明］ ファイバーバンドル $(BT,\rho(T,G),BG,G/T)$ を考える．ここで，ρ

$(T, G):BT\to BG$ は射入 $T\subset G$ により誘導されるファイバーバンドルの射影である．(3.16)により，G/T は可符号であり，仮定と定理 3.13(1)により $(\chi(G/T), p)=1$ であるから，定理 3.15 が適用できて，$\rho(T, G)^*: H^*(BG; \boldsymbol{Z}_p)\to H^*(BT; \boldsymbol{Z}_p)$ は単射である．$H^{\mathrm{odd}}(BT; \boldsymbol{Z}_p)=0 \Longrightarrow H^{\mathrm{odd}}(BG; \boldsymbol{Z}_p)=0$. 普遍係数定理によって，$H_*(BG)$ は p-torsion をもたない．　　　　(終)

特性環

$\xi=(E, p, B, G)$ を任意の G-バンドルとする．分類定理(第2章定理 6.10)によって，B から分類空間 BG への写像 $f_\xi: B\to BG$ が，ホモトピーの意味で一意的に，存在して ξ は f_ξ により誘導される．従って，準同型

$$f_\xi^*: H^*(BG;\ R)\longrightarrow H^*(B;\ R) \qquad (R \text{ は係数環})$$

は ξ のバンドル構造により一意的に定まる．

定義　f_ξ^* は**特性写像**，$\mathrm{Im}\, f_\xi^*$ は ξ の**特性環**といわれる．

$\Gamma(\xi)=\mathrm{Im}\, f_\xi^*(\subset H^*(B;\ R))$ で表わす．

ファイバーバンドル $\xi=(E, \pi, B, F, H)$ において，Lie 群 G が E および F に作用し，その作用によって，次の G-バンドルがあるとする：

$$\zeta=(E, p, E/G, G) \quad \text{および} \quad \eta=(F, p, F/G, G)$$

さらに，G の E への作用は各ファイバー F_b $(b\in B)$ を保ち，許容的写像 $F\to F_b$ と G の作用は可換とする．例えば，ξ は主バンドル $(F=H)$ で，G が H の閉部分群であれば，この性質はみたされる．

このとき，新しいファイバーバンドル $\bar{\xi}=(E/G, \bar{\pi}, B, F/G)$ が構成される．ζ を誘導する写像 $f_\zeta: E/G\to BG$ に，許容写像で定まる射入 $i: F/G\to E/G$ を続けてえられる写像

$$f_\eta=f_\zeta\circ i: F/G\longrightarrow E/G\longrightarrow BG$$

の誘導する G-バンドルは η と同値である．従って，

(3.18)　　$\Gamma(\eta)\subset \mathrm{Im}\{i^*: H^*(E/G;\ R)\longrightarrow H^*(F/G;\ R)\}$

第3章定理 4.4 によって，

(3.19)　R が体で，$H^*(F/G;\ R)=\Gamma(\eta)$ ならば，バンドル $\bar{\xi}=(E/G, \bar{\pi}, B, F/G)$ において，F/G は全体的非0-ホモローグである．

定理 3.20　G はコンパクト 1-連結 Lie 群，T はその極大トーラス，$\zeta=(G, p, G/T, T)$，$\boldsymbol{k}$ は標数 p の体とするとき，次の各条件は同値である：

(1)　$H^*(BG)$ は p-torsion をもたない（$p=0$ ならば無条件）.

(2)　$H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\zeta)$

(3)　$H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$ は $H^2(G/T;\ \boldsymbol{k})$ によって（乗法的に）生成される.

(4)　$H^*(BG;\ \boldsymbol{k})$ は偶数次数の元のみより成る（$H^{\mathrm{odd}}(BG;\ \boldsymbol{k})=0$）.

［証明］　［(1) $\Longrightarrow$ (2)］　(1.20) (7) によって，$H^*(BG;\ \boldsymbol{k})$ と $H^*(BG;\ \boldsymbol{Q})$ の Poincaré 級数は等しいから，$H^{\mathrm{odd}}(BG;\ \boldsymbol{Q})=0 \Longrightarrow H^{\mathrm{odd}}(BG;\ \boldsymbol{k})=0$．また，(3.16) より $H^{\mathrm{odd}}(G/T;\ \boldsymbol{k})=0$．故に，ファイバーバンドル $(BT, \rho(T, G), BG, G/T)$ に関するスペクトル系列で，E_2 は偶数次数のみより成り，$E_2=E_\infty \Longrightarrow \rho(T, G)^*$ は全射 $\Longrightarrow$ (2).

［(2) $\Longrightarrow$ (3)］　$H^*(BT;\ \boldsymbol{k})$，従って，$\Gamma(\zeta)=H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$ は次数 2 の元で生成されるから，(3) がえられる.

［(3) $\Longrightarrow$ (4)］　G は 1-連結 $\Longrightarrow G$ は 2-連結（第 6 章定理 4.12）$\Longrightarrow BG$ は 3-連結．BT および G/T は 1-連結であるから，バンドル ζ に関する完全系列

$$H^2(BT;\ \boldsymbol{k}) \xrightarrow{i^*} H^2(G/T;\ \boldsymbol{k}) \longrightarrow H^3(BG;\ \boldsymbol{k})=0$$

によって，i^* は全射．(3) の仮定から，$i^*: H^*(BT;\ \boldsymbol{k}) \to H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$ は全射 $\Longrightarrow G/T$ は全体的非 0-ホモローグ $\Longrightarrow \rho(T, G)^*: H^*(BG;\ \boldsymbol{k}) \to H^*(BT;\ \boldsymbol{k})$ は単射．$H^{\mathrm{odd}}(BT;\ \boldsymbol{k})=0$ であるから，$H^{\mathrm{odd}}(BG;\ \boldsymbol{k})=0$.

［(4) $\Longrightarrow$ (1)］　普遍係数定理より明らか.　（終）

次の定理において U は G の最大階数連結閉部分群，G の型は $(2r_1-1, \cdots, 2r_l-1)$，U の型は $(2s_1-1, \cdots, 2s_l-1)$，$l=\mathrm{rank}\, G$ とする.

定理 3.21　$H^*(U)$ が p-torsion をもたないと仮定するとき，次が成り立つ：

(1)　$H^*(G/U)$ は p-torsion をもたず，標数 p の体 $\boldsymbol{k}$ について，

$$P_p(G/U, t)=P(H^*(G/U;\ \boldsymbol{k}), t)=\prod(1-t^{2r_i})/(1-t^{2s_i})$$

(2)　さらに，$(\chi(G/U), p)=1$ ならば，$H^*(BG)$ は p-torsion をもたず，$H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\nu)$．ただし，$\nu=(G, G/U, U)$.

［証明］　(1)　仮定から $H^*(U)$ は p-torsion をもたないから，系 2.13 により $H^*(BU)$ も p-torsion をもたない．極大トーラス $T\subset U$ について，$\zeta=(U, p, U/T, T)$ を考えると，定理 3.20 (2) により $H^*(U/T;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\zeta)$．従って，

(3.19)により，ファイバーバンドル $(G/T, \pi, G/U, U/T)$ において，U/T は mod p 全体的非0-ホモローグであるから，このバンドルのホモロジースペクトル系列 $\{E_r\}$ は自明：

$$E_2 = H^*(G/U;\ \boldsymbol{k}) \otimes H^*(U/T;\ \boldsymbol{k}) = E_\infty = GrH^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$$

これより，$P_p(G/U, t) P_p(U/T, t) = P_p(G/T, t)$．ここで，第6章定理5.5(2)を適用すればよい．

(2)　$(\chi(G/U), p) = 1$ であるから，ファイバーバンドル $(BU, \rho(U, G), BG, G/U)$ に定理3.15を適用すると，$\rho(U, G)^* : H^*(BG;\ \boldsymbol{k}) \to H^*(BU;\ \boldsymbol{k})$ は単射．定理3.20によって，$H^{\text{odd}}(BU;\ \boldsymbol{k}) = 0 \Longrightarrow H^{\text{odd}}(BG;\ \boldsymbol{k}) = 0 \Longrightarrow H^*(BG)$ は p-torsion をもたない．(1)を使えば上のファイバーバンドルのスペクトル系列の $E_2 = H^*(BG;\ \boldsymbol{k}) \otimes H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})$ は偶数次数の元のみから成るから，$E_2 = E_\infty \Longrightarrow H^*(G/U;\ \boldsymbol{k}) = \Gamma(\nu)$．　　(終)

Weyl 群の作用

G はコンパクト Lie 群，U は G の連結閉部分群とし，主バンドル $\xi = (E, \pi, B, G)$ および $\eta = (E, \pi', E/U, U)$，E/U は左商空間，を考える．N が G の部分群で $N \subset N(U)$ ならば，内部自己同型 $u \mapsto nun^{-1}$ により N は U に作用する．$nU = Un$ $(n \in N)$ であるから N の左作用は E の剰余類 Ux の置換を与え，η に作用する．従って，N は $H^*(E;\ R)$，$H^*(E/U;\ R)$ および η のスペクトル系列 $\{E_r\}$ にも作用する．$N \cap U$ の E/U への作用は自明，U は連結であるから $H^*(E;R)$ への作用も自明である．このとき，次の性質をみたす：

(3.22.1)　N の作用は $N/(N \cap U)$ の $H^*(E;R)$ および $H^*(E/U;\ R)$ への作用を誘導し，その作用は η に関する filtration を保ち，ファイバーバンドルの写像により誘導されたものと可換．

(3.22.2)　N の $E_2 = H^*(E/U;\ H^*(U;\ R))$ への作用は，同型

$$E_2^{p,0} \cong H^p(E/U;\ R),\quad E_2^{0,q} \cong H^q(U;\ R)$$

と可換．特に，$N \cap U$ は自明に作用し，従って，$N/(N \cap U)$ は E_r $(r \geq 2)$ に作用する．

(3.22.3)　$N/(N \cap U)$ の E_∞ への作用は $H^*(E;\ R)$ への作用から誘導されたものと一致する．特に，R が体の場合は $H^*(E;\ R)$ および E_∞ への作用と可

換な，ベクトル空間としての同型 $H^*(E;\ R)\cong E_\infty$ がある．

次に，ファイバーバンドル $\xi/U=(E/U, p, B, G/U)$，G/U は左商空間，を考える．このとき N は右移動により G/U および E/U に作用し，この作用は ξ/U の構造と矛盾せず，B への作用は自明である．従って，N は $H^*(G/U;\ R)$ へ作用し，U は連結であるから $N/(N\cap U)$ は $H^*(G/U;\ R)$ に作用する．さらに，ξ/U のスペクトル系列にも作用し，次の性質をみたす：

(3.22.1)′　$N/(N\cap U)$ は $H^*(E/U;\ R)$ に作用し，$H^*(B;\ R)$ への作用は自明である．さらに，その作用は ξ/U に関する filtration を保ち，ファイバーバンドルの写像により誘導されたものと可換．

(3.22.2)′　G が連結のときは N は ξ/U のスペクトル系列 $\{E_r\}$ に作用し，$E_2\cong H^*(B;\ H^*(G/U;\ R))$ への作用は同型

$$E_2^{p,0}\cong H^p(B;\ R),\quad H_2^{0,q}\cong H^q(G/U;\ R)$$

と可換．$N\cap U$ は自明に作用するから $N/(N\cap U)$ は E_r $(r\geq 2)$ に作用する．

(3.22.3)′　$N/(N\cap U)$ の E_∞ への作用は $H^*(E/U;\ R)$ への作用から誘導されたものと一致する．特に，R が体の場合は $H^*(E/U;\ R)$ および E_∞ への作用と可換な，ベクトル空間としての同型 $H^*(E/U;\ R)\cong E_\infty$ がある．

上の議論において，$U=T=$(G の極大トーラス)，$N=N(T)=$(G における T の正規化群)として，主バンドル $\zeta=(ET, p, BT, T)$ を考える $(ET=EG)$．このとき，G の Weyl 群　$W(G)=N(T)/T$　は(3.22.1)，(3.22.2)，(3.22.3)の性質をみたす．$H^*(T)$ は torsion をもたないから，ζ のスペクトル系列 $\{E_r\}$ において，$E_2=H^*(BT)\otimes H^*(T)$．$EG=ET$ は可縮 $\Longrightarrow E_3^{0,1}=E_\infty^{0,1}=0=E_\infty^{2,0}=E_3^{2,0}\Longrightarrow d_2: E_2^{0,1}\to E_2^{2,0}$ は同型．従って，転入 τ は次の同型を与える：

$$\tau: H^1(T)\cong H^2(BT) \tag{3.23}$$

ここで，$H^1(T)$ の生成元の転入 τ による像を t_i とすると $H^*(BT)=\boldsymbol{Z}[t_1, \cdots, t_l]$，$l=\dim T=\operatorname{rank} G$．この転入 τ によって，$H^*(BT)$ を $H^1(T)$ 上の多項式と同一視する操作は $W(G)$ の作用と可換である．

正則表現

X は多面体とし，$H^q(X;\ \boldsymbol{Q})$ の基底を $\{e(q)_i,\ 1\leq i\leq b_q\}$ とする．このとき，写像 $f: X\to X$ に対してその **Lefschetz 数** $L(f)$ を

$$L(f)=\sum(-1)^q \mathrm{tr}(A_q(f))$$

で定義する．ただし，$f^*(e(q)_i)=\sum a_{ij}(q)e(q)_j$ と表わされるとき，$\mathrm{tr}(A_q(f))$ は係数行列 $A_q(f)=(a_{ij}(q))$ のトレースである．ここで再び次の不動点定理を証明なしに引用する(第5章(3.13)参照)．

(3.24) **(Lefschetz の不動点定理)** 多面体 X において写像 $f: X\to X$ が不動点をもたなければ $L(f)=0$ である．

有限群 W の位数を r とし，V は基底 $\{e_w \mid w\in W\}$ をもつ r 次元ベクトル空間とする．各元 $u\in W$ について線型写像 ρ_u を $\rho_u: V\to V \Longleftrightarrow \rho_u(e_w)=e_{uw}$ で定義することにより線型表現 $\rho: W\to GL(V)$ がえられる．これを W の**正則表現**という．$u\neq e$(単位元)のとき，$\rho_u e_w=e_{uw}$，$uw\neq w$，であるから行列 ρ_u の対角成分はすべて0である．即ち，$\mathrm{tr}(\rho_u)=0$．一方，$\mathrm{tr}(\rho_e)=\mathrm{tr}(\mathrm{I}_r)=r=\dim V$．表現 ρ の指標は $\chi_W(u)=\mathrm{tr}(\rho_u)$ であるから，表現論の指標の一般論によって，

(3.25) 正則表現の指標 χ_W は

$$\chi_W(u)=\begin{cases} r=|W| & (u=e) \\ 0 & (u\neq e) \end{cases}$$

で特徴づけられる．

G はコンパクト連結 Lie 群，T は G の極大トーラス，$N(T)$ は T の正規化群とする．各元 $n\in N(T)$ に対して同相写像 f_n を

$$f_n: G/T \longrightarrow G/T \Longleftrightarrow f_n(gT)=ngT$$

と定義する．さらに Weyl 群 $W(G)$ の線型表現 ρ を

$$\rho: W(G)\longrightarrow \mathrm{Aut}(H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q}))$$
$$\Longleftrightarrow \rho_w=f_n{}^*: H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q})\longrightarrow H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q}),\quad \{n\}=w\in W(G)$$

と定義する．このとき f_n の Lefschetz 数 $L(f_n)$ は定義により，

$$\begin{aligned} L(f_n) &= \sum(-1)^q(H^q(G/T;\ \boldsymbol{Q})\ \text{における}\ \mathrm{tr}(\rho_w)),\quad \{n\}=w \\ &= \sum(H^q(G/T;\ \boldsymbol{Q})\ \text{における}\ \mathrm{tr}(\rho_w)) \\ &= (H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q})\ \text{における}\ \mathrm{tr}(\rho_w)) \end{aligned}$$

$n\notin T(\Longleftrightarrow w\neq e)$ ならば f_n は不動点をもたないから(3.24)により $L(f_n)=0$，従って，指標は $\chi_{W(G)}(w)=\mathrm{tr}(\rho_w)=0$．一方，$n\in T(\Longleftrightarrow w=e)$ ならば，f_n は恒等写像であるから，指標は $\chi_{W(G)}(w)=\mathrm{tr}(\rho_w)=\dim H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q})=|W(G)|$．(3.25) により，これは正則表現の指標であるから，

定理 3.26 (Leray)　$H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q})$ における $W(G)$ の自然な表現 ρ は正則表現である.

系 3.27　(1)　$W(G)$ の作用で不変な $H^*(G/T;\ \boldsymbol{Q})$ の元全体は $H^0(G/T;\ \boldsymbol{Q})$ と一致する.

(2)　(1)および定理 3.26 は $\boldsymbol{Q}$ を標数 0 の任意の体 $\boldsymbol{k}$ でおきかえても成り立つ.

Weyl 群の不変量

以下しばらく，G はコンパクト連結 Lie 群，T は G の極大トーラスとする.

記号　$I(G)=H^*(BT)^{W(G)}=(H^*(BT)$ における $W(G)$ の不変量のなす環$)$

$I^+(G)=($正の次数の元より成るもの$)\subset I(G)$

$x\in H^*(BT)$，$0\neq k\in \boldsymbol{Z}$ について，$kx\in I(G)$ とすると，$kx=w(kx)=k(wx)$ $(\forall w\in W(G))$．$H^*(BT)$ は自由だから，$x=wx\Longrightarrow x\in I(G)$．よって，

(3.28)　$I(G)$ は直和因子である.

特に，
$$I(G)\otimes R\subset H^*(BT)\otimes R=H^*(BT;\ R).$$

定理 3.29　$H^*(G)$ が p-torsion をもたないならば，標数 p の体 $\boldsymbol{k}$ について，

(1)　$\rho_p(T,G)^*:H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\to H^*(BT;\ \boldsymbol{k})$ は $I(G)\otimes\boldsymbol{k}$ の上への同型,

(2)　$H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\xi)=H^*(BT;\ \boldsymbol{k})/(I^+(G)\otimes\boldsymbol{k})$，$\xi=(G,G/T,T)$

[証明]　ファイバーバンドル $(BT,BG,G/T)$ の $\boldsymbol{k}$-係数コホモロジースペクトル系列 $\{E_r\}$ を考える：
$$E_2=H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(BT;\ \boldsymbol{k})$$
$H^*(G)$ は p-torsion をもたないから，定理 2.12 によって，$H^*(BG;\ \boldsymbol{k})$ は偶数次数の元のみより成る．(3.16)によって，$H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$ も偶数次数の元のみより成るから，E_2 もそうで，スペクトル系列は自明：$E_2=E_\infty$．従って，
$$\rho_p(T,G)^*:H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\longrightarrow H^*(BT;\ \boldsymbol{k})\ \text{は単射}$$
であることがわかる．後は，$\rho_p(T,G)^*$ の像を決定するだけである.

[$p=0$ の場合]　(3.22.1)$'$により $W(G)$ は $H^*(BG;\ \boldsymbol{k})$ に自明に作用する．一方，定理 3.26，系 3.27 により，$W(G)$ は $H^*(G/T;\ \boldsymbol{k})$ に正則表現として作用し，その不変量全体は $H^0(G/T;\ \boldsymbol{k})$ である．これより，$H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\otimes H^0(G/T;\ \boldsymbol{k})$ は E_2 における $W(G)$ のすべての不変量の集合であり，その E_∞ への射

影は $\mathrm{Im}\,\rho_0(T,G)^*$ であることがわかる．$E_2=E_\infty$ であるから (3.22.3)′ のベクトル空間の同型で同一視して，$E_\infty=H^*(BT;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\otimes H^0(G/T;\ \boldsymbol{k})=I(G)\otimes\boldsymbol{k}\Longrightarrow\mathrm{Im}\rho_0(T,G)^*$ は不変量の集合 $I(G)\otimes\boldsymbol{k}$.

［$p\neq0$ の場合］ $I(G)$ は直和因子$\Longrightarrow\dim(I(G)\otimes\boldsymbol{k})^i=\mathrm{rank}(I(G))^i=\dim H^i(BG;\ \boldsymbol{Q})$. $H^*(G)$ は p-torsion をもたないから，系 2.13 により $H^*(BG)$ も p-torsion をもたない$\Longrightarrow\dim H^i(BG;\ \boldsymbol{k})=\dim H^i(BG;\ \boldsymbol{Q})$. さらに，$H^*(BG;\ \boldsymbol{k})=H^*(BG)\otimes\boldsymbol{k}\Longrightarrow\rho_p(T,\ G)^*=\rho_{\boldsymbol{Z}}(T,\ G)^*\otimes\boldsymbol{k}\Longrightarrow\mathrm{Im}\,\rho_p(T,\ G)^*\subset I(G)\otimes\boldsymbol{k}$. (3.22.1)′ と上のことより，$\dim(\mathrm{Im}\,\rho_p(T,G)^*\cap H^i(BT;\ \boldsymbol{k}))=\dim(I(G)\otimes\boldsymbol{k}^i\Longrightarrow\mathrm{Im}\,\rho_p(T,G)^*\cap H^i(BT;\ \boldsymbol{k})=(I(G)\otimes\boldsymbol{k})^i$. （終）

注意 3.30 $H^*(G)$ が torsion をもたないならば，上の定理は $\boldsymbol{Z}$-係数で成り立つ．

定理 3.31 G は(必ずしも連結でない)コンパクト Lie 群，T はその極大トーラス，$\boldsymbol{k}$ は標数 0 の体とするとき，$\rho_0(T,G)^*:H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\cong I(G)\otimes\boldsymbol{k}$.

［証明］ $G_0=$(単位元 e の連結成分)$\supset T$ であるから自然な射影 $EG/T\to EG/G_0\to EG/G$，即ち，

$$BT\xrightarrow{\rho(T,G_0)}BG_0\xrightarrow{\ \lambda\ }BG$$

があり，$\rho(T,G)=\lambda\circ\rho(T,G_0)$ をみたす．写像 λ は被覆変換群 G/G_0 をもつ正則被覆である．$W(G_0)$ は $W(G)$ の正規部分群で $W(G)/W(G_0)=G/G_0$. さらに，$\rho(T,G)^*=\rho(T,G_0)^*\circ\lambda^*$ であり，次と定理 3.29 を適用すればよい：

λ^* は単射で，$\mathrm{Im}\,\lambda^*=(H^*(BG_0;\ \boldsymbol{k})$ における被覆変換群の不変量).

これを証明する．$\Pi=G/G_0$ は $C_0=C_*(BG_0;\boldsymbol{k})$ に作用し，$\lambda_\#$ は射影 $C_0\to C=C_0/\Pi=C_*(BG;\boldsymbol{k})$ とみなせる．チェイン写像 $t:C\to C_0$ を，$t(s)=\dfrac{1}{n}\sum_{g\in\Pi}g\cdot\bar{s}$, $n=|\Pi|$, $\lambda_\#\bar{s}=s$, で定義し，$P=t\circ\lambda_\#$ とおく．$\lambda_\#\circ t=id$ であるから，$t^*\circ\lambda^*=id\Longrightarrow\lambda^*$ は単射，t^* は全射．$P^*(x)=\dfrac{1}{n}\sum g\cdot x$ であるから，x が Π-不変$\Longleftrightarrow P^*(x)=x\Longleftrightarrow x\in\mathrm{Im}\,P^*$. $P^*=\lambda^*\circ t^*$ かつ t^* は全射$\Longrightarrow\mathrm{Im}\,\lambda^*=\mathrm{Im}\,P^*=(H^*(BG_0;\boldsymbol{k})$ の Π-不変量). （終）

注意 3.32 $\boldsymbol{k}$ を標数 p の体とする．$(|G/G_0|,p)=1$ のとき，$I(G)\otimes\boldsymbol{k}$ は $I(G_0)\otimes\boldsymbol{k}$ における G/G_0 の不変量の集合である．この事実を使えば次が示される：

$H^*(G_0)$ が p-torsion をもたず，$(|G/G_0|,p)=1$ ならば，

$$\rho_p(T,G)^*:H^*(BG;\boldsymbol{k})\cong I(G)\otimes\boldsymbol{k}$$

定理 3.33 U は G の最大階数連結閉部分群とする．$H^*(G)$ と $H^*(U)$ が p-torsion をもたないならば，U-バンドル $\eta=(G, G/U, U)$ と標数 p の体 $\boldsymbol{k}$ について，

$$H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\eta)=(I(U)\otimes\boldsymbol{k})/(I^+(G)\otimes\boldsymbol{k})$$

［証明］ ファイバーバンドル $(BU, \rho(U,G), BG, G/U)$ の $\boldsymbol{k}$-係数コホモロジースペクトル系列 $\{E_r\}$ を考える：

$$E_2=H^*(BG;\ \boldsymbol{k})\otimes H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})\Longrightarrow H^*(BU;\ \boldsymbol{k})$$

定理 2.12 と定理 3.21 (1) により E_2 の各項は偶数次数の元しかもたず $E_2=E_\infty$．従って，G/U は全体的非 0-ホモローグで，射入 $i: G/U\to BU$ について，$i^*: H^*(BU;\ \boldsymbol{k})\to H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})$ は全射である．ここで i^* は特性写像であるから，$H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})=\Gamma(\eta)$．これより，$H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})=H^*(BU;\ \boldsymbol{k})/(\rho_p(U,G)^*H^+(BG;\ \boldsymbol{k}))$．定理 3.29 (1) により単射である $\rho_p(T,U)^*$ を適用して，

$$\begin{aligned}H^*(G/U;\ \boldsymbol{k})&=(I(U)\otimes\boldsymbol{k})/(\rho_p(T,U)^*\rho_p(U,G)^*H^+(BG;\ \boldsymbol{k}))\\&=(I(U)\otimes\boldsymbol{k})/(\rho_p(T,G)^*H^+(BG;\ \boldsymbol{k}))\\&=(I(U)\otimes\boldsymbol{k})/(I^+(G)\otimes\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

（終）

注意 3.34 同様な結果は $\boldsymbol{Z}$ 上でも成り立つ：$H^*(G), H^*(U)$，$H^*(G/U)$ が torsion をもたないならば $H^*(G/U)=I(U)/(I^+(G))$．

§4 コホモロジー作用素と Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジー

Eilenberg-MacLane 空間とコホモロジー群

G をアーベル群，n を正の整数とするとき，(G, n) 型の **Eilenberg-MacLane 複体**を

$$K(G,n)\Longleftrightarrow \pi_i(K(G,n))=0\ \ (i\neq n),\quad \pi_n(K(G,n))\cong G$$

で表わす（第 4 章 §1 参照）．Hurewicz の定理により，

$$H_n(K(G,n))\cong\pi_n(K(G,n))\cong G$$

この同型対応を $\mathrm{Hom}(H_n(K(G,n)), G)\cong H^n(K(G,n);\ G)$ の元とみた

$$u_n\in H^n(K(G,n);\ G)\cong\mathrm{Hom}(G,G)$$

を $K(G,n)$ の**基本コホモロジー類**という．

定理 4.1 X を（弧状）連結な CW-複体（またはそれと同じホモトピー型をも

つ位相空間）とする．$f: X \to K(G, n)$ のホモトピー類 $[f] \in [X, K(G, n)]_0$ に $f^*(u_n) \in H^n(X; G)$ を対応させるとき，自然性をみたす同型対応

$$[X, K(G, n)]_0 \cong H^n(X; G)$$

がえられる．ただし，$K(G, n) = \Omega K(G, n+1)$ と考えて左辺に群構造を入れる．

［略証］ $\dim X < n$ や $X^n = 1$ 点のときは自明である．$X^n/X^{n-1} = \vee S_\alpha^n$ (1 点和) $\Longrightarrow [X^n/X^{n-1}, K(G, n)]_0 \cong H^n(X^n/X^{n-1}; G) = C^n(X; G)$ (胞複体のコチェイン複体)．

このとき，$X^n/X^{n-1} \hookrightarrow X^{n+1}/X^{n-1} \to X^{n+1}/X^n$ に関する第4章定理 1.28 (2) の完全系列における δ^* が $\delta: C^n(X; G) \to C^{n+1}(X; G)$ に対応することがわかる．従って，$[X, K(G, n)]_0 \cong [X^{n+1}/X^{n-2}, K(G, n)] = \mathrm{Ker}\,\delta/\mathrm{Im}\,\delta \cong H^n(X; G)$ がえられ，この対応は定理のように与えることができる．　(終)

この定理から，$K(G, n)$ のホモトピー型は G と n にのみ関係して定まることがわかるから，次の定義ができる．

記号　$H^q(\Pi, n; G) = H^q(K(\Pi, n); G)$

(n, Π, q, G)-型**コホモロジー作用素** $\Phi = \{\Phi_X : H^n(X; \Pi) \to H^q(X; G)\}$ は自然性 $\Phi_X \circ f^* = f^* \circ \Phi_Y$ $(f: X \to Y)$ をみたすものとして定義された(第3章§1)．これについて次の定理が成り立つ．

定理 4.2　(n, Π, q, G)-型コホモロジー作用素 Φ と $H^q(\Pi, n; G)$ の元との間に，$\Phi \mapsto \Phi(u_n)$ による1対1対応がある．

［証明］ 逆の対応 $\alpha \mapsto \Phi_\alpha$ $(\alpha \in H^q(\Pi, n; G))$ を次のように定義する．$x \in H^n(X; \Pi)$ に対して，$f^*(u_n) = x$ となる $f: X \to K(\Pi, n)$ がある(定理 4.1)．このとき，$\Phi_\alpha(x) = f^*(\alpha) \in H^q(X; G)$ とおく．Φ_α がコホモロジー作用素であることは容易に確かめられる．$\alpha \mapsto \Phi_\alpha \mapsto \Phi_\alpha(u_n) = \alpha$ は明らか．また，Φ の自然性から，$\Phi \mapsto \Phi(u_n) = \alpha$ のとき $\Phi = \Phi_\alpha$ が示される．　(終)

t 次の (Π, G)-型**安定コホモロジー作用素**　$\Phi: H^n(X; \Pi) \to H^{n+t}(X; G)$ は各 n と X に対して与えられて，δ^* あるいは懸垂 $\sigma^*: H^m(SX; \ ) \to H^{m-1}(X; \ )$ と可換なものとして定義された．この定義から容易に次の定理がえられる．

定理 4.3　t 次の (Π, G)-型安定コホモロジー作用素 Φ と $\sigma^* \alpha_n = \alpha_{n-1}$ をみたす元 $\alpha_n \in H^{n+t}(\Pi, n; G)$ の列 $\{\alpha_n;\ n = 1, 2, 3, \cdots\}$ とは1対1対応にある．

$K(\Pi, n+1)$ が n-連結なことから，ファイバー空間

(4.4) $\Omega K(\Pi, n+1)=K(\Pi, n)\xrightarrow{i} PK(\Pi, n+1)\xrightarrow{p} K(\Pi, n+1)$

に関するコホモロジー懸垂 σ の性質がえられる：

(4.5) $\sigma : H^{i+1}(\Pi, n+1; G)\longrightarrow H^{i}(\Pi, n; G)$ は $i\leq 2n-1$ のとき同型，$i=2n$ のとき単射である．

記号 $A^t(\Pi, G)=H^{n+t}(\Pi, n; G)$, $n>t$

(4.6) t 次の(Π, G)-型安定コホモロジー作用素と $A^t(\Pi, G)$ の元は1対1に対応する．

以上の様に，コホモロジー作用素は Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジーと密接な関係にあり，後者を調べることによって前者の性質もわかる．

安定コホモロジー作用素については次の定理がよく使われる．

定理 4.7 安定コホモロジー作用素 $\boldsymbol{\Phi}$ は，ファイバー空間における転入 τ および懸垂 σ と可換 ($\boldsymbol{\Phi}\circ\tau=\tau\circ\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Phi}\circ\sigma=\sigma\circ\boldsymbol{\Phi}$) である．即ち，次の図式は可換：

$$\begin{array}{ccccc} H^n(F;\Pi) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+1}(E, F;\Pi) & \xleftarrow{p^*} & H^{n+1}(B;\Pi) \\ \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ H^{n+t}(F;G) & \xrightarrow{\delta} & H^{n+t+1}(E, F;G) & \xleftarrow{p^*} & H^{n+t+1}(B;G) \end{array} \qquad \begin{pmatrix}\tau=p^{*-1}\circ\delta \\ \sigma=\delta^{-1}\circ p^*\end{pmatrix}$$

平方作用素と $H^*(\Pi, n;\ \boldsymbol{Z}_2)$

補題 4.7 $u_t\in H^t(\boldsymbol{Z}_2, t;\ \boldsymbol{Z}_2)$ について，$u_t{}^2\in\mathrm{Im}\,\sigma$ かつ $\sigma(u_t{}^2)=0$.

［証明］ 前半は，$\Pi=G=\boldsymbol{Z}_2$, $n=t$ のときの(4.4)に関するスペクトル系列

$$E_2=H^*(\boldsymbol{Z}_2, t+1;\ \boldsymbol{Z}_2)\otimes H^*(\boldsymbol{Z}_2, t;\ \boldsymbol{Z}_2)\Longrightarrow E_\infty=\boldsymbol{Z}_2$$

において，次数の関係から，$r\neq t+1$ かつ $r<2t+1\Longrightarrow d_r(1\otimes u_t{}^2)=0$. また，$d_{t+1}(1\otimes u_t)=u_{t+1}\otimes 1$ と d_{t+1} の分配性により，$d_{t+1}(1\otimes u_t{}^2)=2u_{t+1}\otimes u_t=0$. これは $u_t{}^2$ が転入的，即ち，懸垂 σ の像であることを示している．

後半は，$n=t-1$ の場合を考えて，$d_t(u_t\otimes u_{t-1})=u_t{}^2\otimes 1\Longrightarrow\sigma(u_t{}^2)=0$.（終）

定理 4.8 任意の正の整数 t に対して，t 次の安定コホモロジー作用素

$$Sq^t : H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^{n+t}(X;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

で，以下の性質(1), (2), (3)をみたすものが一意的に存在する：

(1) $Sq^t\circ f^*=f^*\circ Sq^t$ （即ち，コホモロジー作用素），$f: Y\to X$,

(2) $Sq^t\circ\delta^*=\delta^*\circ Sq^t$, $Sq^t\circ\tau=\tau\circ Sq^t$, $Sq^t\circ\sigma=\sigma\circ Sq^t$（即ち，安定である）.

(3) $n=|x|=t$ ならば，$Sq^t(x)=x^2$.

さらに $Sq^0=id$，$Sq^t=0$ $(t<0)$ とするとき，次の性質がみたされる：

(4)　$n=|x|<t$ ならば，$Sq^t(x)=0$.

(5)　**(Cartan 公式)**　$Sq^t(xy)=\sum_{i+j=t} Sq^i(x)Sq^j(y)$

(6)　Sq^1 は $0\to \boldsymbol{Z}_2\to \boldsymbol{Z}_4\to \boldsymbol{Z}_2\to 0$ に関する Bockstein 作用素と一致する.

［証明］ $\sigma: H^{n+t+1}(\boldsymbol{Z}_2, n+1;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^{n+t}(\boldsymbol{Z}_2, n;\ \boldsymbol{Z}_2)$ を考える．$\alpha_t=u_t{}^2$ とおくと，補題 4.7 により $\sigma(\alpha_{t+1})=\alpha_t$ となる α_{t+1} が存在し，(4.5) の後半によって，α_{t+1} は一意的である．(4.5) の前半によって，$\sigma(\alpha_{n+1})=\alpha_n$ をみたす $\alpha_n\in H^{n+t}(\boldsymbol{Z}_2, n;\ \boldsymbol{Z}_2)$ が $n\geq t$ に対して一意的に定まる．$n<t$ のときは補題 4.7 の後半によって $\alpha_n=0$ となる．$\alpha=\{\alpha_n\}$ に対応する安定コホモロジー作用素を Sq^t とおけば，一意的存在と (1), (2), (3), (4) の性質がえられる．

(5) はクロス積×に関する

(5′)　**(Cartan 公式)**　$Sq^t(x\times y)=\sum_{i+j=t} Sq^i(x)\times Sq^j(y)$

と同値である．(5′) は $x=u_n$，$y=u_m$ の場合に示せばよい．特に，$t>n+m$ ならば $Sq^t(u_n\times u_m)=0=\sum_{i+j=t} Sq^i(u_n)\times Sq^j(u_m)$，および $Sq^{n+m}(u_n\times u_m)=(u_n\times u_m)^2 =u_n{}^2\times u_m{}^2=Sq^n u_n\times Sq^m u_m=\sum_{i+j=m} Sq^i(u_n)\times Sq^j(u_m)$ で (5′) は $t\geq n+m$ で正しい．あとは $n+m-t$ に関する帰納法で σ と関係づけて示されるが，詳細は読者の研究に委ねる．

(6) は $K(\boldsymbol{Z}_2, 1)=P^\infty(\boldsymbol{R})$ と思えることからえられる．　　　　(終)

定義　整数 $i_j>0$ の列 $I=(i_1, i_2, \cdots, i_l)$ に対して，$|I|=\sum i_j$，$|\phi|=0$,

$$Sq^\phi=id,\quad Sq^I=Sq^{i_1}Sq^{i_2}\cdots Sq^{i_l}\quad (|I|\ \text{次の安定コホモロジー作用素})$$

とおく．

I は**許容的** $\Longleftrightarrow I=\phi$ $(l=0)$，$I=(i)$ $(l=1)$ または $i_j\geq 2i_{j+1}$ $(1\leq j<l)$

と定義する．また，$e(I)=i_l+\sum_{1\leq j<l}(i_j-2i_{j+1})=2i_1-|I|$ を I の **excess** という．

定理 4.9　$H^*(\boldsymbol{Z}_2, n;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[Sq^I u_n;\ I$ は許容的かつ $e(I)<n]$

［証明］ n に関する帰納法．$n=1$ のときは，$K(\boldsymbol{Z}_2, 1)=P^\infty(\boldsymbol{R})$ と思えるから，$H^*(\boldsymbol{Z}_2, 1;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_1]$ で定理は正しい．n について定理が正しいとするとき，$L=n+|I|$ とおいて，

$$H^*(\boldsymbol{Z}_2, n;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[Sq^I u_n]=\Delta((Sq^I u_n)^{2^k})=\Delta(Sq^{2^{k-1}L}\cdots Sq^{2L}Sq^L Sq^I u_n)$$

と生成元の単純系で書ける．許容的および excess の条件を調べて，

$$H^*(\boldsymbol{Z}_2, n;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(Sq^J u_n;\ J\text{ は許容的かつ } e(J)<n+1)$$

がえられる．$\tau(u_n)=u_{n+1}$ であるから，定理 4.8 によって，$\tau(Sq^J u_n)=Sq^J u_{n+1}$. 系 2.8 (1) を (4.4) に適用すると，$H^*(\boldsymbol{Z}_2, n+1;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[Sq^J u_{n+1}]$ がえられる．

(終)

定理 4.10　$n>1$ のとき，

$H^*(\boldsymbol{Z}, n;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[Sq^I u_n;\ I=(i_1, \cdots, i_l)$ は許容的，$i_l>1$ かつ $e(I)<n]$

［証明］ $n=2$ のとき，$K(\boldsymbol{Z}, 2)=P^\infty(\boldsymbol{C})=BU(1)$ と思えるから，$H^*(\boldsymbol{Z}, 2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_2]$ で定理は正しい．以下定理 4.9 と同様に証明される．　(終)

後に使う便宜上，$n=3, 4$ の場合を例示する．

(4.10)′　$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_3,\ Sq^2u_3,\ Sq^4Sq^2u_3,\ Sq^8Sq^4Sq^2u_3, \cdots]$

(4.10)″　$H^*(\boldsymbol{Z}, 4;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_4,\ Sq^2u_4,\ Sq^3u_4,\ Sq^4Sq^2u_4,\ Sq^5Sq^2u_4,$
$Sq^6Sq^3u_4,\ Sq^8Sq^4Sq^2u_4, \cdots]$

定義　$\mathcal{A}_2=A^*(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)=\{(\boldsymbol{Z}_2, \boldsymbol{Z}_2)$-型安定コホモロジー作用素$\}$ に作用素の合成による積を入れたものを **mod 2 Steenrod 代数**という．

系 4.11　$\mathcal{A}_2$ は $\{Sq^I;\ I$ は許容的$\}$ を $\boldsymbol{Z}_2$ 上の基底にもつ．

定理 4.12　mod 2 Steenrod 代数 $\mathcal{A}_2$ は，$\phi(Sq^t)=\sum_{i+j=t} Sq^i\otimes Sq^j$ をみたす対角写像 ϕ に関して (非可換な積 μ をもつ) Hopf 代数となる．$\mathcal{A}_2$ の双対 Hopf 代数 $\mathcal{A}_2{}^*$ の構造は

$$\mathcal{A}_2{}^*=\boldsymbol{Z}_2[\xi_1, \xi_2, \xi_3, \cdots],\quad \mu^*(\xi_n)=\sum_{i=0}^{n}\xi_{n-i}^{2^i}\otimes\xi_i\quad (\xi_0=1)$$

で与えられる．ただし，ξ_n は $I=(2^{n-1}, \cdots, 2, 1)$ のとき $\xi_n(Sq^I)=1$，その他の I について $\xi_n(Sq^I)=0$ で与えられる次数 2^n-1 の元である．

(証明略)

許容的でない J に対する Sq^J は，系 4.11 によって許容的な I に対する Sq^I の一次結合として一意的に表わされる．それを実行するには次の公式が使われる．

(4.13)　**(Adem の関係式)**　$a<2b$ のとき，

$$Sq^aSq^b=\sum_{i=0}^{[a/2]}\binom{b-i-1}{a-2i}Sq^{a+b-i}Sq^i.$$

この公式の証明には，代数的な Sq^t の定義に戻る Adem の方法，$K(\boldsymbol{Z}_2, 1)\times\cdots\times K(\boldsymbol{Z}_2, 1)$ において $u_1\times\cdots\times u_1$ における値を調べる Serre の方法，定理

4.12 を利用する Milnor の方法等があるが，証明は省略して，以下の応用の便宜上，若干の例を挙げるに止める：

(4.14) (1) $Sq^1Sq^{2n}=Sq^{2n+1}$, $Sq^1Sq^{2n+1}=0$

(2) $Sq^2Sq^n=Sq^{n+2}+Sq^{n+1}Sq^1$ $(n\equiv 0,3 \pmod 4,\ n\geq 3)$

$Sq^2Sq^n=Sq^{n+1}Sq^1$ $(n\equiv 1,2 \pmod 4,\ n\geq 1)$

(3) $Sq^4Sq^n=Sq^{n+4}+Sq^{n+3}Sq^1+Sq^{n+2}Sq^2$ $(n\equiv 0,5 \pmod 8,\ n\geq 5)$

$Sq^4Sq^n=Sq^{n+4}+Sq^{n+2}Sq^2$ $(n\equiv 6,7 \pmod 8,\ n\geq 6)$

$Sq^4Sq^n=Sq^{n+3}Sq^1+Sq^{n+2}Sq^2$ $(n\equiv 1,4 \pmod 8,\ n\geq 4)$

$Sq^4Sq^n=Sq^{n+2}Sq^2$ $(n\equiv 2,3 \pmod 8,\ n\geq 2)$

(4) $Sq^{2^k}Sq^{2^{k+1}a}=Sq^{2^k(2a+1)}+\sum_{i=0}^{k-1}Sq^{2^k(2a+1)-2^i}Sq^{2^i}$

素約巾作用素と $H^*(\Pi, n; \boldsymbol{Z}_p)$

p を奇素数とする．$p=2$ の場合と類似の結果があるが，証明は可成り複雑であるので省略し，若干の解説を加えることにする．

まず，$K(\boldsymbol{Z}_p, n)=\Omega K(\boldsymbol{Z}_p, n+1)$ は H-空間であることに注意する．補題 4.7 に対応するのは次の補題である．

補題 4.15 $u_{2t}\in H^{2t}(\boldsymbol{Z}_p, 2t;\ \boldsymbol{Z}_p)$ について，$u_{2t}^p\in \mathrm{Im}\,\sigma$，$\sigma(u_{2t}^p)=0$.

この後半は明らかであるが，前半の証明には，(4.5) を変形した次の命題が必要である．

(4.16) $\sigma: H^{i+1}(\boldsymbol{Z}_p, n+1;\ \boldsymbol{Z}_p)\to H^i(\boldsymbol{Z}_p, n;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は，$i\leq pn-1$ のとき原始的な元の間の同型，$i\leq pn$ のとき原始的な元の間の単射である．さらに，$u_{2t}^p=\sigma(\alpha_{2t+1})$ となる原始的な元 $\alpha_{2t+1}\in H^{2pt+1}(\boldsymbol{Z}_p, 2t+1;\ \boldsymbol{Z}_p)$ が存在する．

これらを使えば，次の定理は定理 4.8 と同様に証明される．

定理 4.17 任意の正の整数 t に対して，$2t(p-1)$ 次の安定コホモロジー作用素

$$\mathcal{P}^t: H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^{n+2t(p-1)}(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$$

で，次の性質 (1), (2), (3) をみたすものが一意的に存在する：

(1) $\mathcal{P}^t\circ f^*=f^*\circ\mathcal{P}^t$

(2) $\mathcal{P}^t\circ\delta^*=\delta^*\circ\mathcal{P}^t$, $\mathcal{P}^t\circ\tau=\tau\circ\mathcal{P}^t$, $\mathcal{P}^t\circ\sigma=\sigma\circ\mathcal{P}^t$

(3) $|x|=2t$ のとき，$\mathcal{P}^tx=x^p$.

さらに，$\mathcal{P}^0=id$，$\mathcal{P}^t=0$ $(t<0)$ とするとき，次の性質がみたされる：

(4)　$|x|<2t$ ならば，$\mathcal{P}^t(x)=0$.

(5)　**(Cartan 公式)**　$\mathcal{P}^t(xy)=\sum_{i+j=t}\mathcal{P}^i(x)\mathcal{P}^j(y)$

定理 4.8(6) に相当するものがない代りに，Bockstein 作用素

$$\beta: H^n(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^{n+1}(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$$

が基礎的なコホモロジー作用素となる．明らかに

(4.18)　$$\beta\beta=0,\quad \beta(xy)=\beta(x)y+(-1)^{|x|}x\beta(y)$$

定理 4.9，定理 4.10 に相当する一般の形の定理は省略して，例を挙げる：

(4.19)　(1)　$H^*(\boldsymbol{Z},2;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[u_2]$

(2)　$H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(u_3,\mathcal{P}^1u_3,\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_3,\cdots)\otimes\boldsymbol{Z}_p[\beta\mathcal{P}^1u_3,\ \beta\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_3,\cdots]$

(3)　$H^*(\boldsymbol{Z},4;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[u_4,\mathcal{P}^1u_4,\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_4,\ \beta\mathcal{P}^{p+1}\beta\mathcal{P}^1u_4,\cdots]$

$$\otimes\Lambda(\beta\mathcal{P}^1u_4\ \beta\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_4,\ \mathcal{P}^{p+1}\beta\mathcal{P}^1u_4,\cdots)$$

この (1) の結果は明らかである．(1) から (2) を出すスペクトル系列において，

$$d_3(1\otimes u_2)=u_3\otimes 1,\ d_{2p+1}(1\otimes u_2{}^p)=\mathcal{P}^1u_3\otimes 1,\ d_{2p^2+1}(1\otimes u_2{}^{p^2})=\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_3\otimes 1,\cdots$$

は $u_2{}^p=\mathcal{P}^1u_2$，$u_2{}^{p^2}=\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_2,\cdots$ よりえられる．これらによって，形式的なスペクトル系列 $\{''E_r\}$ を作ると，$''E_\infty=\Lambda(u_3\otimes u_2^{p-1},\mathcal{P}^1u_3\otimes u_2^{p(p-1)},\cdots)$ となる．実際には $E_\infty=\boldsymbol{Z}_p$ であるから，さらに次のような d_r の存在がわかる：

$$d_{2p+2}(u_3\otimes u_2^{p-1})=\beta\mathcal{P}^1u_3\otimes 1,\quad d_{2p^2+2}(\mathcal{P}^1u_3\otimes u_2^{p(p-1)})=\beta\mathcal{P}^p\mathcal{P}^1u_3\otimes 1,\cdots.$$

ただし，これらの像が β を使って表わされていることをいうには特殊な工夫(例えば整係数で考える)を必要とする．(4.19) (2) はこのようにして求めることができるが，(4.19) (3) あるいはさらに一般の結果を出すには次の結果が必要である．

(4.20)　**(工藤の転入定理)**　次数 $2t$ の元 x が転入的で，$d_{2t+1}(1\otimes x)=y\otimes 1$ とするとき，$d_{2pt+1}(1\otimes x^p)=\mathcal{P}^ty\otimes 1$ および $d_{2pt+2}(y\otimes x^{p-1})=\beta\mathcal{P}^ty\otimes 1$ が成り立つ．

定義　$\mathcal{A}_p=A^*(\boldsymbol{Z}_p,\boldsymbol{Z}_p)$ を **mod p Steenrod 代数**という．(積 μ は合成)

(4.21)　$\mathcal{A}_p$ は β と $\mathcal{P}^t$ で生成される非可換 Hopf 代数(さらに詳しく述べるには許容的な $\mathcal{P}^I$ の定義が必要である)，その双対代数 $\mathcal{A}_p{}^*$ の構造は

$$\mathcal{A}_p{}^*=\boldsymbol{Z}_p[\xi_1,\ \xi_2,\xi_3,\cdots]\otimes\Lambda(\tau_0,\tau_1,\tau_2,\cdots),$$

$$\mu^*(\xi_n)=\sum_{i=0}^n\xi_{n-i}^{p^i}\otimes\xi_i,\quad \mu^*(\tau_n)=\sum_{i=0}^n\xi_{n-i}^{p^i}\otimes\tau_i+\tau_n\otimes 1\qquad(\xi_0=1)$$

で与えられる．ただし，$|\xi_n|=2p^n-2$，$|\tau_n|=2p^n-1$.

(4.22)　(Adem の関係式)

(1)　$a<pb$ のとき，$\mathcal{P}^a\mathcal{P}^b=\sum_{i=0}^{[a/p]}(-1)^{a+i}\binom{(b-i)(p-1)-1}{a-pi}\mathcal{P}^{a+b-i}\mathcal{P}^i.$

(2)　$a\leq pb$ のとき，
$$\mathcal{P}^a\beta\mathcal{P}^b=\sum_{i=0}^{[a/p]}(-1)^{a+i}\binom{(b-i)(p-1)}{a-pi}\beta\mathcal{P}^{a+b-i}\mathcal{P}^i + \sum_{i=0}^{[(a-1)/p]}(-1)^{a+i-1}\binom{(b-i)(p-1)-1}{a-pi-1}\mathcal{P}^{a+b-i}\beta\mathcal{P}^i.$$

特に，

(4.23)
$$\mathcal{P}^1\mathcal{P}^b=(b+1)\mathcal{P}^{b+1}$$

コホモロジー作用素の応用若干

G のホモロジーが p-torsion をもたないとき，定理 2.14 によって，$H^*(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ は多項式環で，$\mathcal{A}_p$ が定理 4.17 の (3)～(5) の意味でこれに作用している．

このようなときに，$\mathcal{P}^1$ の様子を調べるには次の定理が用いられる．また，その $H^*(BG;\boldsymbol{Z}_p)$ における結果は，懸垂 σ によって，$H^*(G;\boldsymbol{Z}_p)$ での結果を与える．

定理 4.24　A^* が $\boldsymbol{Z}_p$ 上の有階代数で，次数$\leq 2pn$ の範囲で，偶数次数>0 の元 $y_1,\cdots,y_m$ で生成される多項式環 $A^*=\boldsymbol{Z}_p[y_1,\cdots,y_m]$ であり，$\mathcal{A}_p$ が定理 4.17 の (3), (4), (5) の条件をみたすように A^* に作用していると仮定する．元 y_i の次数を $|y_i|=2a_i$ とする．

(1)　$a_i\leq n$ かつ $a_i\not\equiv 0 \pmod p$ であれば，$ka_i=a_j+p-1$，$1\leq k\leq p$，をみたす k と j が存在する．特に，i に対して，このような (k,j) が 1 組だけでかつ $k=1$ の場合は，生成元 y_i を $\mathcal{P}^1y_j$ にとり直すことができる．

(2)　(1) の条件をみたす組 (k,j) のうち，$k=1$ となるものが唯 1 つであり，$k>1$ となる j については $\mathcal{P}^1y_j=y_l$ となる l がつねに存在している場合には，(1) と同様に，$k=1$ に対応する j について，y_i を $\mathcal{P}^1y_j$ にとり直すことができる．

［証明］　定理 4.17 (3) と (4.23) から，$y_i{}^p=\mathcal{P}^{a_i}y_i=a_i\mathcal{P}^1(\mathcal{P}^{a_i-1}y_i)$ である．定理の仮定から，$a_i\not\equiv 0$，$y_i{}^p\neq 0$．ここで，Cartan 公式から $\mathcal{P}^1$ は分配的：
$$\mathcal{P}^1(xy)=\mathcal{P}^1(x)y+x\mathcal{P}^1(y)$$

に注意する．従って，$\mathcal{P}^{a_i-1}y_i$ を y_j $(j<i)$ の多項式で表わして $\mathcal{P}^1$ を作用させてみることによって，ある j について $\mathcal{P}^1y_j$ は0でない係数をもつ y_i^k $(1\leq k\leq p)$ の項を含まなければならないことがわかる．次数を比べて，$ka_i=a_j+p-1$ である．またこのような (k,j) が唯1組で $k=1$ ならば，$\mathcal{P}^1y_j=by_i+$(分解可能な元)，$b\not\equiv 0 \pmod p$，でなければならない．よって，(1)が示された．

(2)においては，$\mathcal{P}^1y_j=y_l$ $(l<i)$ となる項は除外してよい． (終)

$p=2$ の場合の応用は§6にある．

Lie 群 G (一般に H-空間) について，Hopf 代数 $H^*(G;\boldsymbol{Z}_p)$ を考える．Cartan 公式により，

(4.25) $$\bar{\phi}(x)=\sum_\alpha x'_\alpha\otimes x''_\alpha \Longrightarrow \bar{\phi}(\mathcal{P}^t x)=\sum_{i+j=t}\sum_\alpha \mathcal{P}^i x'_\alpha\otimes\mathcal{P}^j x''_\alpha$$

Sq^t についても同様で，特に，

定理 4.26 $x\in H^*(G;\boldsymbol{Z}_p)$ が原始的ならば，$\mathcal{P}^t(x)$ $(p>2)$，$Sq^t(x)$ $(p=2)$ も原始的である．

§5 例外群の mod p コホモロジー ($p\neq 2$)

一般的方法

以後，この章では例外群の mod p コホモロジー環を決定するのを目標とするが，まず一般にコンパクト1-連結 Lie 群 G について考えよう．第5章系5.31によって，G は単純群の直積に分解される．従って，G が単純である場合を考えれば十分である．その場合には，第6章定理4.17によって，

(5.1) $$\pi_i(G)=0\ (i<3)\quad \text{および}\quad \pi_3(G)\cong\boldsymbol{Z}$$

G の分類空間 BG を考える．普遍 G-バンドル $G\to EG\to BG$ があって，EG は ∞-連結であるから，第4章の定理1.26，定理1.22によって，全単射

$$[K,G]_0\overset{\Delta^{-1}}{\cong}[SK,BG]_0\cong[K,\Omega(BG)]_0\quad (K: CW\text{-複体})$$

がえられる．$K=G$ のとき，1_G に対応する写像を σ_G とすると，

(5.2) $\sigma_G: G\to\Omega(BG)$ はホモトピー同値写像である．

これは $\sigma_{G*}:[K,G]_0\to[K,\Omega(BG)]_0$ が上の全単射と一致することからわかる．また，ホモトピー群については，$K=S^i$ とおいて，$\Delta:\pi_{i+1}(BG)\cong\pi_i(G)$ であるから，

(5.2)′　　$\pi_i(BG)=0\ (i<4)$　および　$\pi_4(BG)\cong \boldsymbol{Z}$

ここで，BG の5次元以上のホモトピー群を，胞体を順次付着させて消してゆくことにより，BG を含む Eilenberg-MacLane 空間 $K(\boldsymbol{Z},4)$ を作る．射入 $BG\hookrightarrow K(\boldsymbol{Z},4)$ は $H^4(BG;\ \boldsymbol{Z})\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元に対応するものである．

$$P=P(K(\boldsymbol{Z},4),BG),\quad B\tilde{G}=\Omega(K(\boldsymbol{Z},4),BG)$$

とおけば，ファイバー空間 $B\tilde{G}\to P\to K(\boldsymbol{Z},4)$ で BG は P の変位レトラクトであるものがえられる．従って，ホモトピー同値の意味でファイバー空間 $B\tilde{G}\xrightarrow{Bf} BG\to K(\boldsymbol{Z},4)$ がえられる．ここで，Bf は $B\tilde{G}$ の道に終点を対応させるもので，$\Omega K(\boldsymbol{Z},4)=K(\boldsymbol{Z},3)\hookrightarrow B\tilde{G}\xrightarrow{Bf} BG$ はファイバー空間となっている．さらに，第4章(2.4)のように，ファイバー空間 $\Omega(BG)\to K(\boldsymbol{Z},3)\to B\tilde{G}$ がえられ，(5.2)によって，$\Omega(BG)$ は G でおきかえられる．

$$\tilde{G}=\Omega(B\tilde{G}),\quad f=\Omega(Bf):\tilde{G}\longrightarrow \Omega(BG)\simeq G$$

とおくと，$\tilde{G}\xrightarrow{f} G\xrightarrow{j} K(\boldsymbol{Z},3)$ はファイバー空間で，$G\xrightarrow{j} K(\boldsymbol{Z},3)$ は $H^3(G;\ \boldsymbol{Z})\cong \boldsymbol{Z}$ の生成元に対応している．この操作を繰り返して次のファイバー空間の列がえられる：

(5.3)　(1)　$B\tilde{G}\xrightarrow{Bf} BG\longrightarrow K(\boldsymbol{Z},4)$　　($B\tilde{G}$ は4-連結)

(2)　$K(\boldsymbol{Z},3)\longrightarrow B\tilde{G}\xrightarrow{Bf} BG$

(3)　$G\xrightarrow{j} K(\boldsymbol{Z},3)\longrightarrow B\tilde{G}$

(4)　$\tilde{G}\xrightarrow{f} G\xrightarrow{j} K(\boldsymbol{Z},3)$　　($\tilde{G}$ は3-連結)

(5)　$K(\boldsymbol{Z},2)\longrightarrow \tilde{G}\xrightarrow{f} G$

(6)　$\Omega G\longrightarrow K(\boldsymbol{Z},2)\longrightarrow \tilde{G}$

(7)　$\Omega\tilde{G}\longrightarrow \Omega G\longrightarrow K(\boldsymbol{Z},2)$　　($\Omega\tilde{G}$ は2-連結)

(8)　$K(\boldsymbol{Z},1)\longrightarrow \Omega\tilde{G}\longrightarrow \Omega G$

これらは道のファイバー空間で与えられ，(1)を除くとファイバーはすべて閉道空間であるから，

(5.3)′　(5.3)の(2)～(8)は主ファイバー空間である．

以後，G はコンパクト1-連結単純 Lie 群で，その(有理)型は

(5.4)　　$(3=2m_1+1,\ 2m_2+1,\cdots,\ 2m_l+1),\quad m_1=1<m_2\leq\cdots\leq m_l$

であるとする．また，p は素数とする．

まず，ΩG，$\Omega\tilde{G}$ について考える．

補題 5.5　(1)　$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\bigotimes_j \boldsymbol{Z}_p[y_{2n_j}]/(y_{2n_j}^{s_j})$，$|y_{2n_j}|=2n_j$，ただし，$s_j$ は p の巾(または∞)で次の等式が成り立つ：

$$\prod_{i=1}^{l}(1-t^{2m_i})^{-1}=\prod_j(1-t^{2s_jn_j})(1-t^{2n_j})^{-1}$$

(2)　(1)において，$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[y_2]/(y_2{}^{p^f})\otimes B^*$と表わすとき，

$$H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)\cong\Lambda(y_{2p^f-1})\otimes B^*,\quad |y_{2p^f-1}|=2p^f-1$$

であり，$1\otimes B^*$ は $\Omega f^*: H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)\to H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)$ の像に相当する．

［証明］　第6章定理4.16によって，$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は偶数次数の元のみより成り，その Poincaré 級数は $\prod(1-t^{2m_i})^{-1}$ である．Hopf 代数 $H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ に系1.4を適用すれば，これは(1)の形に表わされることがわかる．

(2)　(5.3) (8)のファイバー空間において，$H^*(K(\boldsymbol{Z},1);\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(u_1)$ であり，$\Omega\tilde{G}$ は2-連結であるから，そのスペクトル系列 $\{E_r\}$：

$$E_2=H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)\otimes\Lambda(u_1)\Longrightarrow H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)$$

において，0でない係数を無視して，$d_2(1\otimes u_1)=y_2\otimes 1$ である．d_2 を計算して，

$$E_3=H(E_2)=H(\boldsymbol{Z}_p[y_2]/(y_2{}^{p^f})\otimes\Lambda(u_1))\otimes B^*=\Lambda(y_2{}^{p^f-1}\otimes u_1)\otimes B^*$$

明らかに，$E_3=E_\infty$ であるから，(2)がえられる．　(終)

注意　$s_j=\infty$ の場合は実際には起らない．

$H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)$ から $H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)$ を求めるには，定理2.17または定理2.28が利用される．

G と $\tilde{G}$ の mod p コホモロジー

$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ がある次数までわかったとき，全体の形を定理1.3によって求めることができる場合がある．これを補題の形にまとめておこう．

補題 5.6　X は0-連結かつ有限型のH-空間，N は正の整数とする．

(1)　p は奇素数とする．$|x_i|=2a_i<N$，$|y_j|=2b_j+1<N$ となる $H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の元 x_i, y_j と p の巾 h_i' があって，

$$\text{次数}<N\text{ の範囲で，}\ H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[x_i]/(x_i{}^{h_i'})\otimes\Lambda(y_j)$$

が成り立つとする．このとき，x_i を分解可能な元を法として適当にとりかえることによって，$h_i'\leq h_i\leq\infty$ をみたす p の巾 h_i について，自然な単射

$$\boldsymbol{Z}_p[x_i]/(x_i{}^{h_i})\otimes\Lambda(y_j)\hookrightarrow H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$$

がえられる．さらに，次数$\geq N$の適当な生成元 x_i, y_j を追加することにより，

$$H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[x_i]/(x_i^{h_i})\otimes\Lambda(y_j)$$

特に，$X=G$ がコンパクト Lie 群の場合は次の等式が成り立つ：

$$\dim G=\sum_{k=1}^{l}(2m_k+1)=\sum_i 2a_i(h_i-1)+\sum_j(2b_j+1)$$

(2)　$p=2$ の場合には，仮定は $|x_i|=a_i<N$ と 2 の巾 h_i' について，

次数$<N$ の範囲で，$H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_i]/(x_i^{h_i'})$

でおきかえられ，結論は x_i のおきかえと $|x_i|=a_i\geq N$ となる x_i の追加および 2 の巾 h_i $(h_i'\leq h_i\leq\infty)$ について，

$$H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_i]/(x_i^{h_i})$$

となる．また，コンパクト Lie 群 $X=G$ について，

$$\dim G=\sum_{k=1}^{l}(2m_k+1)=\sum a_i(h_i-1)$$

［証明］　定理 1.3（系 1.4）によって，$H^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の環構造を考え，次数$<N$ で仮定と比較すればよい．$\dim G=\sum(2m_k+1)$ は最高次数の元 $\prod_i x_i^{h_i-1}\prod_j y_j$ の次数 $\sum 2a_i(h_i-1)+\sum(2b_j+1)$ と一致する．$p=2$ の場合も同様．　（終）

$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)$ の結果から $H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ を求めるには，上の補題の外にファイバー空間 (5.3) (4) が利用される．

補題 5.7　$H^3(G)$ の生成元に対応する (5.3) (4) の写像を $j: G\longrightarrow K(\boldsymbol{Z},3)$，$j$ によって誘導される準同型を $j^*: H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_p)\longrightarrow H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ とする．

(1)　$p\neq 2$ のとき，

$$H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(u_3, u_{2p+1}, u_{2p^2+1}, \cdots)\otimes\boldsymbol{Z}_p[u_{2p+2},\ u_{2p^2+2}, \cdots],$$

$\mathcal{P}^{p^i}u_{2p^i+1}=u_{2p^{i+1}-1}$，　$\beta u_{2p^i+1}=u_{2p^i+2}$，　と表わせば，

$\operatorname{Ker} j^*$ は $\{u_{2p^i+1}, (u_{2p^i+2})^{p^f};\ f\geq 0\}$ の一部で生成されるイデアルである．

(2)　$p=2$ のとき，$H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_3, u_5, u_9, \cdots, u_{2^i+1}, \cdots]$，

$Sq^{2^i}u_{2^i+1}=u_{2^{i+1}+1}$，と表わせば，

$\operatorname{Ker} j^*$ は $\{(u_{2^i+1})^{2^f};\ f\geq 0\}$ の一部で生成されるイデアルである．

［証明］　任意の CW-複体から $K(\boldsymbol{Z},3)$ への写像は，$\pi_i(K(\boldsymbol{Z},3))=0$ $(i>3)$ であるから，その複体の 3-切片でホモトープであれば全体でもホモトープである．このことから，j は H-写像であり，j^* は Hopf 代数の準同型であることがわかる．故に，$\operatorname{Im} j^*$ はそれ自身 Hopf 代数で定理 1.3 が適用される．$\operatorname{Ker} j^*$ の生成元を次数の低いものから考えると，定理 1.3（系 1.4）の結果から，その生

成元の次数は $2p^i+1$ または $p^f(2p^i+2)$ ($p=2$ のときは $2^f(2^i+1)$) しか可能性のないことがわかる．一方，u_{2p^i+1}，$(u_{2p^i+2})^{p^f}$ ($p=2$: $(x_{2^i+1})^{2^f}$) 以外の $H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の単項式は対角写像を考えることによって $\mathrm{Ker}\, j^*$ の生成元となりえないことがわかる(補題 5.6 参照)．故に補題がえられる． (終)

定理 5.8 補題 5.7 の記号を用いる．(5.3) (4) について次が成り立つ：

(1) $p\neq 2$ のとき，

次数$\leq N$ の範囲で，$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(x_\alpha)$，$|x_\alpha|$ は奇数$\leq N$,

と仮定する．このとき，生成元 x_α をとり直して，x_α は転入的，$\tau(x_\alpha)\neq 0$ ならば $\tau(x_\alpha)=(u_{2p^i+2})^{p^f}$ ($f\geq 0$) であり，かつこの次数で $\tau(x_\alpha)\neq 0$ となる x_α は唯 1 つであるようにできる．このとき，$\{x_{\alpha'}\}=\{x_\alpha|\tau(x_\alpha)=0\}$ とすれば，$f^*(\bar{x}_{\alpha'})=x_{\alpha'}$ となる $\bar{x}_{\alpha'}$ が存在して，

$$次数\leq N の範囲で，H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\mathrm{Im}\, j^*\otimes\Lambda(\bar{x}_{\alpha'}),$$
$$\mathrm{Im}\, j^*\cong H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_p)/(\tau(x_\alpha)).$$

(2) $p=2$ のときは，$\Lambda(x_\alpha)$，$\Lambda(\bar{x}_{\alpha'})$ をそれぞれ $\Delta(x_\alpha)$，$\Delta(\bar{x}_{\alpha'})$ でおきかえ，$\tau(x_\alpha)=(u_{2^i+1})^{2^f}$ にとって同様の結果が成り立つ．

［証明］ N に関する帰納法により，次数$<N$ で正しいとする．$\{\tau(x_\alpha)|\tau(x_\alpha)\neq 0,\ |x_\alpha|<N\}$ は明らかに正則列であるから，定理 2.24 によって x_α, $|x_\alpha|=N$, も転入的にとり直せる．$\tau(x_\alpha)\neq 0$ ならば，これは $\mathrm{Ker}\, j^*$ の新しい生成元であり，補題 5.7 によって，定数($\neq 0$)倍を除いて定理の型をしている．同じ次数に他の生成元 x_β があれば x_α を法として $\tau(x_\beta)=0$ にとり直せる．以上のことと定理 2.24 の後半によって，定理は証明される． (終)

例外群の mod p コホモロジー (p-torsion のない場合)

1-連結例外群で p-torsion のない場合は次の定理で定められる．

定理 5.9 (5.4) の型をもつコンパクト 1-連結単純 Lie 群 G について，

$$m_l<\mathrm{Min}(pm_2,\ p^2-1)$$

と仮定するとき，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(x_3,x_{2m_2+1},\cdots,x_{2m_l+1})$$

が成り立つ．従って，G の(コ)ホモロジーは p-torsion をもたない．

［証明］ $p=2$ のとき仮定をみたす G は $SU(3)$ しかなく，このとき定理は明

らかであるから，$p>2$ とする．

$H^2(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の生成元 y_2 に関して，2つの場合に分ける．

［$y_2{}^p\neq 0$ の場合］　定理の仮定と補題5.5によって，次数 $<2m_l+2$ の範囲で，
$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[y_2, y_{2m_2}, \cdots, y_{2m_l}]$，$H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[y_{2m_2}, \cdots, y_{2m_l}]$

さらに，定理2.17を $X=\tilde{G}$ に適用して，次数 $<2m_l+2$ の範囲で，

$$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(x_{2m_2+1}, \cdots, x_{2m_l+1})$$

$|u_{2p+2}^p|>|u_{2p^2+2}|=2p^2+2>2m_l+2$ であるから，定理5.8によって，x_{2m_i+1} を転入的にとり直すとき，$\tau(x_{2m_i+1})\neq 0$ となるのは $m_i=p$ かつ $\tau(x_{2m_i+1})=u_{2p+2}$ のときのみで，この場合には x'_{2m_i+1} の代りに j^*u_{2p+1} を使うことにすれば，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(j^*u_3,\ x'_{2m_2+1}, \cdots, x'_{2m_l+1})\otimes B^*$$

が次数 $<2m_l+2$ で成り立つ．ただし，$B^*=\boldsymbol{Z}_p$ または $B^*=\boldsymbol{Z}_p[j^*u_{2p+2}]\otimes\Lambda(j^*u_{2p+1})$ である．$\dim G=\sum_{i=1}^{l}2m_i+1$ であるから，補題5.6(1)によって，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(j^*u_3, x'_{2m_2+1}, \cdots, x'_{2m_l+1})$$

がすべての次数で成り立つ．生成元の記号を書きかえて，定理がえられる．

［$y_2{}^p=0$ の場合］　同様に，次数 $<2m_l+2$ の範囲で，

$$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[y_2]/(y_2{}^p)\otimes\boldsymbol{Z}_p[y_{2p}, y_{2m_2}, \cdots, y_{2m_l}]$$
$$H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(y_{2p-1})\otimes\boldsymbol{Z}_p[y_{2p}, y_{2m_2}, \cdots, y_{2m_l}]$$
$$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)\ =\boldsymbol{Z}_p[x_{2p}]\otimes\Lambda(x_{2p+1}, x_{2m_2+1}, \cdots, x_{2m_l+1})$$

がえられる．ここで，$p>m_l$ ならば $\boldsymbol{Z}_p[x_{2p}]\otimes\Lambda(x_{2p+1})$ は除外してよいから，上と同様である．$p\leq m_l$ の場合は，定理5.8(1)を若干拡張する必要がある．即ち，$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[x_{2p}]\otimes\Lambda(x_\alpha)$ の場合も考える．定理2.24によって，x_{2p} を転入的にとれる．$\tau(x_{2p})=0$ ならば，$f^*(\bar{x}_{2p})=x_{2p}$ となる $\bar{x}_{2p}$ があるから，定理2.25によって，$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\mathrm{Im}\,j^*\otimes\boldsymbol{Z}_p[\bar{x}_{2p}]\otimes\Lambda(x_\alpha')$ の形になるが $\dim G$ と合わない．従って，$\tau(x_{2p})\neq 0$ である．0でない係数を無視して，$\tau(x_{2p})=u_{2p+1}\Longrightarrow\tau(\beta x_{2p})=u_{2p+2}$ となるから，定理2.25によって，$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ は次数 $<2m_l+2$ の範囲で定理の形になる．ただし，$\mathrm{Ker}\,j^*$ は u_{2p+1}, u_{2p+2} を含んでいる．何れにしても結果的には $y_2{}^p\neq 0$ の場合と同じことになる．　(終)

注意 5.9′　定理の証明において，$u_{2p+1}=\mathcal{P}^1u_3$ であるから，

(1)　$y_2{}^p\neq 0$ かつ $p\leq m_l\Longrightarrow\mathcal{P}^1x_3=x_{2p+1}\neq 0$,

(2)　$y_2{}^p=0$ かつ $p\leq m_l\Longrightarrow\mathcal{P}^1x_3=0$.

系 5.10 定理 5.9 の仮定の下に x_{2m_i+1} $(i=1, 2, \cdots, l)$ は普遍転入的にとれて，その転入像を $y_{2m_i+2}=\tau(x_{2m_i+1})$ とするとき，

$$H^*(BG; \boldsymbol{Z}_p)=\boldsymbol{Z}_p[y_4, y_{2m_2+2}, \cdots, y_{2m_l+2}]$$

となる．従って，BG の(コ)ホモロジーは p-torsion をもたない．

［証明］ Borel の転入定理(定理 2.9)を使えばよい． (終)

単純群の分類を使えば次の定理がえられる．

定理 5.11 コンパクト 1-連結単純群 G およびその分類空間 BG の(コ)ホモロジーは次の場合 p-torsion をもたない：

$$p\geq 2;\quad G=SU(n),\ Sp(n)$$
$$p\geq 3;\quad G=G_2,\ \mathrm{Spin}(n)$$
$$p\geq 5;\quad G=F_4,\ E_6,\ E_7$$
$$p\geq 7;\quad G=E_8$$

［証明］ 古典型の場合は既に知られている．例外群の場合は，(m_2, m_l) の値は G_2 で $(5, 5)$，F_4 で $(5, 11)$，E_6 で $(4, 11)$，E_7 で $(5, 17)$，E_8 で $(7, 29)$ であるから，上の p の値は定理 5.9 の仮定をみたす． (終)

例外群の mod p コホモロジー (p-torsion のある場合)

定理 5.11 で残されている場合について，G が古典型の場合 ($p=2$; $G=\mathrm{Spin}(n)$, $n\geq 7$) には p-torsion があることがわかっている．例外群についても同じことがいえる．

定理 5.12 次の場合 1-連結例外群 G の(コ)ホモロジーは p-torsion をもつ：

$$G=G_2\ (p=2);\quad G=F_4,\ E_6,\ E_7\ (p=2, 3);\quad G=E_8\ (p=2, 3, 5)$$

［証明］ 第 6 章の定理 7.12, 定理 7.19, 定理 7.15 によって，これらの G と p の値について，$f_*: \pi_i(G)\to\pi_i(K(\boldsymbol{Z}, 3))$ は $i\leq 2p+1$ のとき同型，$i=2p+2$ のとき全射である．従って，J.H.C. Whitehead の定理によって，$f_*: H_{2p+1}(G)\cong H_{2p+1}(K(\boldsymbol{Z}, 3))$．一方，$H^*(\boldsymbol{Z}, 3; \boldsymbol{Z}_p)$ において，$\beta\mathcal{P}^1 x_3\neq 0$ $(p\neq 2)$, $Sq^1Sq^2x_3=x_3{}^2\neq 0$ $(p=2)$ である．これは $H_{2p+1}(K(\boldsymbol{Z}, 3))$，従って $H_{2p+1}(G)$ が p-torsion をもつことを示している． (終)

これらのうち，$p=3, 5$ の場合について調べよう．

第 6 章の定理 7.11，定理 7.18，定理 7.14 によって，

(5.13) $H^2(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の生成元 y_2 について，

(1) $(G, p)=(F_4, 3)$，$(E_6, 3)$，$(E_8, 5)$ のとき，$y_2{}^p \neq 0$,

(2) $(G, p)=(E_7, 3)$，$(E_8, 3)$ のとき，$y_2{}^9 \neq 0$.

定理 5.14 $H^*(F_4;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3)\otimes\Lambda(x_3, x_7, x_{11}, x_{15})$

$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3)\otimes\Lambda(x_3, x_7, x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17})$

ここで，$\mathcal{P}^1 x_3=x_7$，$\beta x_7=x_8$.

［証明］ $G=F_4$ または $G=E_6$ とする．それぞれの型は (3, 11, 15, 23)，(3, 9, 11, 15, 17, 23) である．(5.13) (1)を使って定理 5.9 の前半の証明と同様に，次数 <18 の範囲で，

$$H^*(\tilde{F}_4;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(x_{11}, x_{15}),\quad H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17})$$

がえられる．$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(u_3, u_7, u_{19}, \cdots)\otimes\boldsymbol{Z}_3[u_8, u_{20}, \cdots]$ であるから，定理 5.8 において，$\tau(x_i)=0$ であり，次数<18 の範囲で，

$$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_3)\cong\boldsymbol{Z}_3[x_8]\otimes\Lambda(x_3, x_7)\otimes H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_3),\quad x_7=\mathcal{P}^1 x_3,\quad x_8=\beta x_7$$

が成り立つ．$\dim G=3+\sum x_i+23=3+7+8\times 2+\sum x_i$ ($i=11, 15$ または $i=9, 11, 15, 17$) であるから，補題 5.6 (1) より定理がえられる． (終)

定理 5.15 $H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3)\otimes\Lambda(x_3, x_7, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{27}, x_{35})$

$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[x_8, x_{20}]/(x_8{}^3, x_{20}{}^3)\otimes\Lambda(x_3, x_7, x_{15}, x_{19}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$

ここで，$\mathcal{P}^1 x_3=x_7$，$\beta x_7=x_8$，$\mathcal{P}^3 x_7=x_{19}$，$\beta x_{19}=x_{20}$ (E_7 では $x_{20}=0$).

［証明］ まず E_7 を考える．その型は (3, 11, 15, 19, 23, 27, 35) であるから，(5.13) (2)の $y_2{}^9\neq 0$，補題 5.5，定理 2.17 を使って，次数<30 の範囲で，

$$H^*(\Omega E_7;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[y_2, y_{10}, y_{14}, y_{18}, y_{22}, y_{26}]$$
$$H^*(\Omega\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[y_{10}, y_{14}, y_{18}, y_{22}, y_{26}]$$
$$H^*(\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_3)\ =\Lambda(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27})$$

と計算される．$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(u_3, u_7, u_{19}, u_{55}, \cdots)\otimes\boldsymbol{Z}_3[u_8, u_{20}, u_{56}, \cdots]$ であるから，定理 5.8 において，$\tau(x_i)\neq 0$ となる可能性は $\tau(x_{19})=u_{20}$ および $\tau(x_{23})=u_8{}^3$ のみである．さらに，補題 5.6 も考察すると次の形であることがわかる：

$$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(x_3, x_7, x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{27})\otimes B^*\otimes C^*\otimes A^*,$$

$B^*=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3)$，または$=\Lambda(x_{23})\otimes\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^{3^f})$ $(f\geq 2)$,

$C^*=\boldsymbol{Z}_3$，または$=\Lambda(x_{19})\otimes\boldsymbol{Z}_3[x_{20}]/(x_{20}{}^{3^g})$ $(g\geq 1)$,

$$A^*=\Lambda(x_\alpha)\otimes \boldsymbol{Z}_3[x_\beta]/(x_\beta{}^{h_\beta}) \quad (|x_\alpha|, |x_\beta| \geq 30)$$

ここで $\dim E_7=133=|x_3x_7x_{11}x_{19}x_{27}x_8{}^2|+35$ であるから，最高次数が 133 になるためには，$B^*\otimes C^*\otimes A^*=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3)\otimes\Lambda(x_{35})$ でなければならない．$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_3)$ では，$x_i=j^*(u_i)$ $(i=3,7,8,19)$ であるから，$\mathcal{P}^1x_3=x_7$，$\beta x_7=x_8$，$\mathcal{P}^3x_7=x_{19}$ である．また，$\beta x_{19}=j^*(u_{20})=j^*\tau(x_{19})=0$.

E_8 の型 $(3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59)$ についても同様に考察して，

$$H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}), \quad 次数<42$$

および，
$$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_3)=\Lambda(x_3, x_7, x_{15}, x_{19}, x_{27}, x_{35}, x_{39})\otimes B^*\otimes C^*\otimes A^*,$$
$$B^*=\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^3),\ \text{または}=\Lambda(x_{23})\otimes\boldsymbol{Z}_3[x_8]/(x_8{}^{3^f}) \quad (f\geq 2),$$
$$C^*=\boldsymbol{Z}_3[x_{20}]/(x_{20}{}^{3^g}) \quad (g\geq 1),$$
$$A^*=\Lambda(x_\alpha)\otimes\boldsymbol{Z}_3[x_\beta]/(x_\beta{}^{h_\beta}) \quad (|x_\alpha|, |x_\beta|\geq 42)$$

$\dim E_8=248=|x_3x_7x_{15}x_{19}x_{27}x_{35}x_{39}x_8{}^2x_{20}^2|+47$ であるから，$B^*\otimes C^*\otimes A^*=\boldsymbol{Z}_3[x_8, x_{20}]/(x_8{}^3, x_{20}^3)\otimes\Lambda(x_{47})$ であることがわかる．コホモロジー作用素については E_7 と同様である． (終)

定理 5.16 $H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_5)=\boldsymbol{Z}_5[x_{12}]/(x_{12}^5)\otimes\Lambda(x_3, x_{11}, x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47})$，$\mathcal{P}^1x_3=x_{11}$，$\beta x_{11}=x_{12}$.

［証明］ E_8 の型を考えて，定理 5.15 の証明と同様に，次数<50 の範囲で，

$$H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_5)=\Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{35}, x_{39}, x_{47}),$$
$$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_5)=\boldsymbol{Z}_5[u_{12}]\otimes\Lambda(u_3, u_{11})$$

ここで，$\tau(x_i)\neq 0$ の可能性はなく，$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_5)\otimes H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_5)\subset H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_5)$ が次数 <50 で成り立ち，補題 5.6 (1) より定理がえられる． (終)

注意 5.17 $H^*(Ad(E_6);\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_p)$ $(p\neq 3)$

$$H^*(Ad(E_6);\ \boldsymbol{Z}_3)=\boldsymbol{Z}_3[x_2, x_8]/(x_2{}^9, x_8{}^3)\otimes\Lambda(x_1, x_3, x_7, x_9, x_{11}, x_{15})$$
$$H^*(Ad(E_7);\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_p) \quad (p\neq 2)$$

コホモロジー作用素

定理 5.18 定理 5.9 (定理 5.11) において，G が例外群の場合を考える．普遍転入的な生成元 x_{2m_i+1} を適当に選んで，次の (α), (β) をみたすようにとれる：

(α) $m_i\neq p$ かつ $m_j=m_i+p-1$ ならば，$\mathcal{P}^1x_{2m_i+1}=x_{2m_j+1}$.

(β) $m_i=p$ または $m_j=m_i+p-1$ となる m_j がないときは，$\mathcal{P}^1x_{2m_i+1}=0$.

［証明］ $x_{2m_i+1}=\sigma(y_{2m_i+2})$ は普遍転入的，従って原始的である．このとき，$\mathcal{P}^1 x_{2m_i+1}$ も原始的である．$H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=\Lambda(x_{2m_i+1})$ の原始的な元は x_{2m_i+1} の定数倍であるから，(β) の後半がえられる．また，(β) の前半も，$m_i=p$ ならば (α) によって $\mathcal{P}^1(x_3)=x_{2p+1} \Longrightarrow \mathcal{P}^1 x_{2p+1}=\mathcal{P}^1\mathcal{P}^1 x_3=2\mathcal{P}^2 x_3=0$ ((4.23) および定理 4.17(4))．(α) については，個々の G について，定理 4.24 を $H^*(BG;\ \boldsymbol{Z}_p)$ に適用した上 σ を施せばよい．$G=E_8$，$p=7$ の場合を例にとって示す．定理 4.24 (1) より，$\mathcal{P}^1 y_{48}=y_{60}$，$\mathcal{P}^1 y_{36}=y_{48}$，$\mathcal{P}^1 y_{28}=y_{40}$ にとれる．ここで，さらに定理 4.24 (2) より，$\mathcal{P}^1 y_{24}=y_{36}$，さらに $\mathcal{P}^1 y_4=y_{16}$ にとれる．これらに σ を施して (α) がえられる．他の場合も同様であるから省略する．　(終)

古典型の場合には次の結果がある．

定理 5.19　古典型の G については定理 5.18 の(β)および次の式が成り立つ：

$$\mathcal{P}^k x_{2m_i+1}=\binom{m_i}{k} x_{2m_i+2k(p-1)+1} \quad (p \text{ は奇素数})$$

［証明］ まず $G=SU(l+1)$ の場合，第4章定理 5.4 の写像 $f=\bar{\beta}_{1,l}:SP_l(\boldsymbol{C})\to SU(l+1)$ は全射 $f^*:H^*(SU(l+1);\ \boldsymbol{Z}_p)\to H^*(SP_l(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z}_p)$ を誘導し $\mathrm{Ker} f^*$ は分解可能な元全体である．定理 5.18 の証明のように，$\mathcal{P}^k x_{2m_i+1}$ は $x_{2m_i+2k(p-1)+1}$ の定数倍であるから，定理の式は f^* の像について示せばよい．さらに，$S:H^*(P_l(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z}_p)\cong H^{*+1}(SP_l(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z}_p)$ は $\mathcal{P}^k$ と可換な同型であるから，$H^2(P_l(\boldsymbol{C});\ \boldsymbol{Z}_p)$ の生成元 u について，$\mathcal{P}^k(u^m)=\binom{m}{k}u^{m+k(p-1)}$ を示せばよい．この式は Cartan 公式と $\mathcal{P}^1(u)=u^p$，$\mathcal{P}^i(u)=0$ $(i>1)$ より容易にえられる．

$G=Sp(n)$ の場合は射入 $Sp(n)\hookrightarrow SU(2n)$ によって生成元が対応すること(第3章定理 6.7)を使えばよい．

$G=\mathrm{Spin}(n)$ の場合は，$p\neq 2$ であるから，$SO(n)$ でおきかえてよい．第4章定理 6.23 の分解を用いて，SU の場合に帰着される．　(終)

いずれの場合も，単純 Lie 群の型をしらべて次の系がえられる．

系 5.20　p を奇素数とする．定理 5.9 において，$(G,p)\neq(G_2,3)$ かつ $p\leq m_l$ ならば $m_i=p$ となる m_i があって，$\mathcal{P}^1 x_3=x_{2p+1}\neq 0$ である．従って，注意 5.9′ で(2)の場合は $G=G_2$，$p=3$．

注意 5.21　p-torsion のある場合に，$\bar{\phi}(x_{11})=x_8\otimes x_3$ $(p=3)$，$\bar{\phi}(x_{15})=x_{12}\otimes x_3$ $(p=5)$．他の生成元の $\bar{\phi}$ も決定されていて，その結果を用いて p-torsion のある場合のコホモロジー作用素が決定されている．

§6　例外群の mod 2 コホモロジー

G_2 F_4 の mod 2 コホモロジー

補題 6.1　$G=G_2$ または $G=F_4$ とするとき，

$$j^*: H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

は，次数<8 の範囲で同型である．

［証明］　第 6 章定理 7.11 によって，$H^2(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 y_2 について $y_2{}^2\neq 0$. G_2 の型は $(3,11)$，F_4 の型は $(3,11,15,23)$ であるから，補題 5.5 によって，次数<14 の範囲で，

$$H^*(\Omega G;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_2,y_8,y_{10}]/(y_2{}^4),\quad \text{または}=\boldsymbol{Z}_2[y_2,y_{10}]$$

$$H^*(\Omega\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(y_7)\otimes\boldsymbol{Z}_2[y_8,y_{10}],\qquad \text{または}=\boldsymbol{Z}_2[y_{10}]$$

補題 5.6 または懸垂同型を使って，次数<15 の範囲で，

(6.1)′　$H^*(\tilde{G};\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_8,x_9,x_{11})$，または$=\Delta(x_{11})$.

(5.3) (4) に関するコホモロジー完全系列より補題がえられる．　(終)

定理 6.2　$H^*(G_2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3]/(x_3{}^4)\otimes\Lambda(x_5)$,　$x_5=Sq^2x_3$

［証明］　$H^*(\boldsymbol{Z},3;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_3,u_5,u_9,\cdots]$，$u_5=Sq^2x_3$，であるから，補題 6.1 によって定理は次数$<8$ で正しい．$\dim G_2=3+11=|x_3{}^3x_5|$ であるから，補題 5.6 (2) より定理がえられる．　(終)

系 6.3　$H^*(BG_2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7]$，$y_6=Sq^2y_4$，$y_7=Sq^3y_4=Sq^1y_6$

［証明］　$H^*(G_2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_3,x_5,x_3{}^2)$ である．x_3 は転入的$\Longrightarrow x_5=Sq^2x_3, x_3{}^2=Sq^3x_3$ も転入的．系 2.8 (1) より系がえられる．　(終)

F_4 については，まずその部分群 Spin(9) および $SO(9)=\mathrm{Spin}(9)/\boldsymbol{Z}_2$ について考える．第 3 章の系 5.10，定理 5.12 より，

(6.4)　(1)　$H^*(BSO(n);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[w_2,w_3,\cdots,w_{n-1},w_n]$　$(w_k=0,\ k>n)$

　(2)　$Sq^jw_k=\sum_{i=0}^{j}\binom{k-i-1}{j-i}w_{k+j-i}w_i$　$(0\leq j\leq k)$

補題 6.5　(1)　$H^*(B\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_8,y_{16}]$，$y_6=Sq^2y_4$，$y_7=Sq^3y_4=Sq^1y_6$

(2)　$H^*(\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_3,x_5,x_6,x_7,x_{15})$，　$x_i=\sigma(y_{i+1})$

［証明］　ファイバー空間 $B\boldsymbol{Z}_2=K(\boldsymbol{Z}_2,1)\xrightarrow{i}B\mathrm{Spin}(9)\to BSO(9)$ のスペクト

ル系列：

$$E_2=H^*(BSO(9);\ \boldsymbol{Z}_2)\otimes H^*(\boldsymbol{Z}_2,1;\ \boldsymbol{Z}_2)\Longrightarrow H^*(B\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2)$$

を用いて計算する．ここで，$H^*(\boldsymbol{Z}_2,1;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_1]$，$B\mathrm{Spin}(9)$ は4-連結であるから，$d_2(1\otimes u_1)=w_2\otimes 1$ でなければならない．E_3 を計算すると，

$$E_3=H(E_2)=H(\boldsymbol{Z}_2[w_2]\otimes\Lambda(u_1))\otimes\boldsymbol{Z}_2[w_3,\cdots,w_9]\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_1{}^2]$$
$$=\boldsymbol{Z}_2[w_3,\cdots,w_9]\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_1{}^2]$$

転入と Sq^1, Sq^2 との可換性から，$d_3(1\otimes u_1{}^2)=d_3(1\otimes Sq^1u_1)=Sq^1w_2\otimes 1=w_3\otimes 1$，$d_5(1\otimes u_1{}^4)=d_5(1\otimes Sq^2(u_1{}^2))=Sq^2w_3\otimes 1=(w_5+w_3w_2)\otimes 1=w_5\otimes 1$．よって，

$$E_4=H(E_3)=\boldsymbol{Z}_2[w_4,w_5,\cdots,w_9]\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_1{}^4],\quad E_5=E_4,$$
$$E_6=H(E_5)=\boldsymbol{Z}_2[w_4,w_6,w_7,w_8,w_9]\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_1{}^8]$$

さらに，$E_9=E_6$，$d_9(1\otimes u_1{}^8)=d_9(1\otimes Sq^4(u_1{}^4))=Sq^4w_5\otimes 1=(w_9+w_7w_2+w_6w_3+w_5w_4)\otimes 1=w_9\otimes 1$ を使って，

$$E_{10}=H(E_9)=\boldsymbol{Z}_2[w_4,w_6,w_7,w_8]\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_1{}^{16}],\quad E_{10}=E_{16},$$

最後に，$u_1{}^{16}$ も転入的でその転入像は $\tau(u_1{}^{16})=\tau(Sq^8(u_1{}^8))=Sq^8w_9=w_9w_8=0$ であるから，$d_{16}(1\otimes u_1{}^{16})=0\Longrightarrow E_{16}=E_\infty$．従って，$i^*(y_{16})=u_1{}^{16}$ となる y_{16} がある．$y_i=\rho^*(w_i)$ $(i=4,6,7,8)$ とおけば，$H^*(B\mathrm{Spin}(9);\boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_8,y_{16}]$．$Sq^2w_4=w_6$，$Sq^3w_4=Sq^1w_6=w_7$ であるから，(1)は証明された．

(2)は(1)に系2.8(2)を適用すればよい．　　　　　　　　　　　　　　　　(終)

注意 6.5′　$n>9$ のとき，$H^*(B\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ は多項式環ではない．例えば，

$$H^*(B\mathrm{Spin}(10);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_8,y_{10},y_{32}]/(y_7y_{10})$$

また，$n>9$，$n\neq 2^f+1$ のときは，$H^*(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ は原始的生成ではなく，$H_*(\mathrm{Spin}(n);\ \boldsymbol{Z}_2)$ は可換でないことが証明できる．

定理 6.6　(1)　$H^*(F_4;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3]/(x_3{}^4)\otimes\Lambda(x_5,x_{15},x_{23})$，$x_5=Sq^2x_3$，$x_3{}^2=Sq^3x_3=Sq^1x_5$，$x_{23}=Sq^8x_{15}$．ここで，各 x_i は普遍転入的，従って原始的である．

(2)　$H^*(BF_4;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_{16},y_{24}]$，$y_6=Sq^2y_4$，$y_7=Sq^3y_4=Sq^1y_6$，$y_{24}=Sq^8y_{16}$

［証明］(1)　ファイバーバンドル $\mathrm{Spin}(9)\xrightarrow{i}F_4\xrightarrow{p}F_4/\mathrm{Spin}(9)$ のスペクトル系列：

$$E_2 = H^*(F_4/\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2) \otimes H^*(\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2) \Longrightarrow H^*(F_4;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

において，$H^*(F_4/\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[x_8]/(x_8{}^3)$（第 6 章定理 7.8(1)），$H^*(\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2) = \Delta(x_3, x_5, x_6, x_7, x_{15})$ である．定理 6.5(2) によって，$H^*(\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元は懸垂像であるから普遍転入的，従って上のスペクトル系列においても転入的である．

次数の関係から，$\tau(x_i) = 0$ $(i=3, 5, 6)$．x_7 については，

$$(\alpha)\quad \tau(x_7) = x_8 \qquad \text{または} \qquad (\beta)\quad \tau(x_7) = 0$$

(β) の場合は，次数<15 で $H^*(F_4;\ \boldsymbol{Z}_2) = \Delta(x_3, x_5, x_6, x_7)$ となるが，$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_2) = \Delta(u_3, u_5, u_6, u_9, u_{10}, \cdots)$ であるから，これは補題 6.1 に反する．故に，(α) の場合が正しく，$H(\boldsymbol{Z}_2[x_8]/(x_8{}^3) \otimes \Delta(x_7)) = \Delta(x_8{}^2 \otimes x_7)$ であるから，

$$H^*(F_4;\ \boldsymbol{Z}_2) = \Delta(x_3, x_5, x_6, x_{15}, x_{23})$$

である．補題 6.1 より，$Sq^2 x_3 = x_5$，$x_3{}^2 = Sq^3 x_3 = Sq^1 x_5 = x_6$ がわかる．その他の部分は (2) を証明した後に，系 2.8(2) を使って示される．

(2)　ファイバーバンドル $F_4/\mathrm{Spin}(9) \xrightarrow{i} B\mathrm{Spin}(9) \xrightarrow{p} BF_4$ のスペクトル系列

$$E_2 = H^*(BF_4;\ \boldsymbol{Z}_2) \otimes \boldsymbol{Z}_2[x_8]/(x_8{}^3)$$
$$\Longrightarrow H^*(B\mathrm{Spin}(9);\ \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[y_4, y_6, y_7, y_8, y_{16}]$$

を考える．(1) の結果 (α) は $i^*(y_8) = x_8$ を示している．故に，i^* は全射で，このスペクトル系列は自明：$E_2 = E_\infty$ である．故に，ρ^* は単射で，

$$H^*(BF_4;\ \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[y_4, y_6, y_7, y_{16}, y_{24}] \quad (\rho^* y_{16} = y_{16} + \cdots,\ \rho^* y_{24} = y_8{}^3 + \cdots)$$

にとれることがわかる．次数の関係と Cartan 公式から，イデアル (y_4, y_6, y_7) は Sq^i で閉じていることがわかるから，これを法として計算する．Adem の関係式 $Sq^8 Sq^{16} = Sq^{24} + Sq^{20} Sq^4 + Sq^{22} Sq^2 + Sq^{23} Sq^1$ により，

$$0 \neq y_{24}^2 = Sq^{24} y_{24} \equiv Sq^8 Sq^{16} y_{24} \Longrightarrow Sq^{16} y_{24} \neq 0 \Longrightarrow Sq^{16} y_{24} \equiv y_{16} y_{24}$$

Cartan 公式によって，$y_{24}^2 \equiv Sq^8(y_{16} y_{24}) \equiv (Sq^8 y_{16}) y_{24} + y_{16}(Sq^8 y_{24})$．故に $y_{24} \equiv Sq^8 y_{16} \bmod (y_4, y_6, y_7)$ でなければならない．$y_{24} = Sq^8 y_{16}$ とおきかえると (2) がえられる．（終）

注意 6.6′　定理 6.6(1) に挙げた以外の $Sq^k x_i$ $(k>0)$ は 0 になる．それは，$Sq^k x_i$ は原始的であるから 0 でなければ x_{i+k}（ただし，$x_6 = x_3{}^2$）でなければならないからである．

E_8 の部分群

コンパクト 1-連結な例外 Lie 群 E_8 の root 系は第5章(6.26)のように

$$\left\{\pm e_i \pm e_j \ (1\leq i<j\leq 8),\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{\nu(i)}e_i \ (\sum\nu(i) \text{ は偶数})\right\}$$

で与えられているとする．E_8 は 1-連結であるから，整格子 $\Gamma(E_8)=\Gamma_0(E_8)=\exp^{-1}(e)\subset L(T^8)=\boldsymbol{R}^8$ は反転 root $\theta_r{}^*$ で生成される．従って，次がわかる：

(6.7) $$\Gamma(E_8)=\left\{\frac{1}{2}(n_1,\cdots,n_8)\,|\,n_i\in\boldsymbol{Z},\ n_1\equiv\cdots\equiv n_8 \ (\mathrm{mod}\ 2),\ \sum_{i=1}^{8}n_i\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 4)\right\}$$

定理 6.8 コンパクト 1-連結な E_7, E_6 および $A_8=SU(9)/\boldsymbol{Z}_3$，$SU(7), SU(6)$ が E_8 の部分群として含まれ，

$$E_7\supset E_6,\quad A_8\cap E_7\supset SU(7),\quad SU(7)\cap E_6\supset SU(6)$$

をみたす．また，これらの部分群の射入は π_3, H^3, H_3 の同型を誘導する．

［証明］ A_8 は第5章定理 7.16 によって，$N(X_2)$ で与えられるものとする．A_8 は $\{\alpha_i\ (i\neq 2), -\tilde{\alpha}\}=\left\{\frac{1}{2}(e_1-e_2-\cdots-e_7+e_8),\ e_{i+1}-e_i\ (1\leq i\leq 6),\ -e_7-e_8\right\}$ を単純 root にもち，$\exp^{-1}(Z(A_8))$はこれらの単純 root による $\boldsymbol{Z}$ の逆像の共通部分であるから，次がえられる：

$$\exp^{-1}(Z(A_8))=\left\{\frac{1}{6}(n_1,\cdots,n_7,-n_8)\,|\ n_i\in\boldsymbol{Z},\ n_1\equiv\cdots\equiv n_8\ (\mathrm{mod}\ 6),\ \sum_{i=1}^{8}n_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 12)\right\}$$

(6.7) と比較して，$Z(A_8)\cong\boldsymbol{Z}_3$．$Z(SU(9))=\boldsymbol{Z}_9\Longrightarrow A_8=SU(9)/\boldsymbol{Z}_3$．

$\tilde{\alpha}$ の反転 root $\tilde{\alpha}^*$ を含む直線 $L'=\{(0,\cdots,0,t,t)\}$ の exp による像を T^1 とし，$Z(T^1)$を考えると，$Z(T^1)$ の root 系は第5章(6.26)の E_7 の root 系と同一のものである．従って，$Z(T^1)$ は $E_7\times T^1$ と局所同型で，準同型 $f: E_7\to Z(T^1)\subset E_8$ があって $f(E_7)\cdot T^1=Z(T^1)$．$\exp^{-1}(Z(f(E_7)))$ は $T^7=T^8|_{x_7=-x_8}$ において，$\bigcap_{i=1}^{7}\alpha_i{}^{-1}(\boldsymbol{Z})$ で与えられる．特に，点 $\left(\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},0,0\right)$ は $\exp^{-1}(Z(f(E_7)))$ に属するが，$\Gamma(E_8)$ には属さないから，$Z(f(E_7))\supset\boldsymbol{Z}_2$．$Z(E_7)\cong\boldsymbol{Z}_2$ であるから，これは $f: E_7\cong f(E_7)$ を示している．

E_6 についても，同様に準同型 $f: E_6\to E_7$ があって，$T^1=\exp\{(0,\cdots,0,2t,t,-t)\}$ について，$f(E_6)\cdot T^1=Z(T^1)$ かつ $T^6=T^7|_{x_6=x_7}$ において，$\exp^{-1}(Z(f(E_6)))=\bigcap_{i=1}^{6}\alpha_i{}^{-1}(\boldsymbol{Z})$ は点 $\left(0,\cdots,0,\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ を含み $Z(f(E_6))\supset\boldsymbol{Z}_3$．$Z(E_6)\cong\boldsymbol{Z}_3$ であるから，$f: E_6\cong f(E_6)$．

同じように，$T^1=\exp\{(t,\cdots,t,-2t,2t)\}$ によって $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\cdots,\alpha_7\}$ を単純 root にもつ $A_6\subset E_7$，$T^1=\exp\{(t,\cdots,t,-t,t)\}$ によって $\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6\}$

を単純 root にもつ $A_5 \subset E_6$ がえられる．$\exp\left(\frac{2}{7}, \cdots, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{3}{7}\right)$ は $Z(A_6)$ の位数 7 の元で，$Z(SU(7)) \cong \boldsymbol{Z}_7$ であるから，$A_6 \cong SU(7)$．また，$\exp\left(\frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}, \frac{5}{12}, -\frac{5}{12}\right)$ は $Z(A_5)$ の位数 6 の元で，$Z(SU(6)) \cong \boldsymbol{Z}_6$ であるから，$A_5 \cong SU(6)$ である．root の対応から，$A_5 \subset A_6 \subset A_8$ がわかる．

α_1 に対応する S^3 は E_8 および定理の各部分群に共通の部分群で，第 6 章系 6.25 によって S^3 は π_3 の生成元を与えるから後半がえられる．　（終）

系 6.9　適当な同型対応によって，射入 $SU(6) \subset SU(7) \subset A_8$ は標準的な射入と射影 $SU(9) \to A_8 = SU(9)/\boldsymbol{Z}_3$ の合成と同一視できる．

第 3 章より特殊ユニタリー群 $SU(n)$ に関する結果を引用する：

(6.10)　(1)　$H^*(BSU(n); \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[c_2, c_3, c_4, \cdots, c_n]$，　$|c_i| = 2i$

(2)　$H^*(SU(n); \boldsymbol{Z}_2) = \Lambda(e_3, e_5, e_7, \cdots, e_{2n-1})$，　$e_{2i-1} = \sigma(c_i)$

(3)　(Wu の公式)　$Sq^{2j} c_i = \sum_{k=0}^{j} \binom{i-k-1}{j-k} c_{i+j-k} c_k$　$(0 \leq j \leq i)$

ただし，$c_0 = 1$，$c_a = 0$ $(a = 1,\ a > n)$，$\binom{-1}{0} = 1$．

(4)　$Sq^{2j} e_{2i-1} = \binom{i-1}{j} e_{2i+2j-1}$　$(e_{2a-1} = 0,\ a > n)$

Wu の公式の特別な場合として，よく使われるものを挙げておく：

(6.11)　(1)　$Sq^2 c_2 = c_3$，$Sq^2 c_4 = c_5$，$Sq^2 c_6 = c_7$，$Sq^2 c_8 = c_9$，$Sq^2 c_{2i+1} = 0$

(2)　$Sq^4 c_3 = c_5 + c_3 c_2$，$Sq^4 c_4 = c_6 + c_4 c_2, \cdots$

(3)　$Sq^6 c_4 = c_7 + c_5 c_2 + c_4 c_3, \cdots$

(4)　$Sq^8 c_5 = c_9 + c_7 c_2 + c_6 c_3 + c_5 c_4$

(5)　$n = 9$ とするとき，$Sq^{2i} c_8 = c_8 c_i + i \cdot c_9 c_{i-1}$　$(2 \leq i \leq 8)$．

E_6 の mod 2 コホモロジー

まず，$H^*(E_6; \boldsymbol{Z}_2)$ の大略の形を決定する．

補題 6.12　$H^*(E_6; \boldsymbol{Z}_2) = \boldsymbol{Z}_2[x_3]/(x_3{}^4) \otimes \Delta(x_5, x_9, x_{15}, x_{17}, x_{23})$，$x_5 = Sq^2 x_3$，$x_9 = Sq^4 x_5$，$x_5{}^2 = x_9{}^2 = 0$ である．ここで，$H^2(\Omega E_6; \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 y_2 について，

(α)　$y_2{}^8 \neq 0 \Longrightarrow Sq^8 x_9 = x_{17}$

(β)　$y_2{}^8 = 0 \Longrightarrow Sq^8 x_9 = 0$

［証明］　(α)　$y_2{}^8 \neq 0$ とする．E_6 の型は $(3, 9, 11, 15, 17, 23)$ であるから，補題 5.5 によって，次数 < 28 の範囲で，

$$H^*(\Omega E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_2]\otimes\Delta(y_8, y_{10}, y_{14}, y_{16}, y'_{16}, y'_{20}, y_{22})$$
$$H^*(\Omega\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(y_8, y_{10}, y_{14}, y_{16}, y'_{16}, y'_{20}, y_{22})$$

y_8, y_{10}, y_{14} は転入的である．y_{16}, y'_{16} も転入的であるとすると，定理 2.7 より，

$$H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_9, x_{11}, x_{15}, x_{17}, x'_{17}],\quad 次数<21$$

Adem の関係式 $Sq^9=Sq^2Sq^7+Sq^8Sq^1$ を使えば，$x_9{}^2=Sq^9x_9=0$ となって矛盾である．故に，y_{16}，y'_{16} の一方，例えば y_{16} は転入的ではなく $d_9(1\otimes y_{16})=x_9\otimes y_8$ としてよい．y'_{16} も転入的でなければ $y'_{16}+y_{16}$ は転入的であるから，これを改めて y'_{16} にとり直せば，定理 2.28(2) のように，

$$H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(x_9)\otimes\boldsymbol{Z}_2[x_{11}, x_{15}, x'_{17}],\quad 次数<21$$

となる．定理 5.8(2) を使って，$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ を計算する．

(6.13) $$H^*(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_3, u_5, u_9, u_{17}, u_{33}, \cdots],$$
$$u_5=Sq^2u_3,\quad u_9=Sq^4u_5,\quad u_{17}=Sq^8u_9$$

であるから，$\tau(x_9)=u_5{}^2$, $\tau(x_{11})=u_3{}^4$，$\tau(x'_{17})=u_9{}^2$ の可能性はあるが，$\tau(x_{15})=0$ である．従って，$x_{15}\in H^{15}(E_6;\boldsymbol{Z}_2)$ で $f^*(x_{15})=x_{15}$ となるものがあり，

$$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_3, x_5, x_3{}^2, x_9, x_{15}, x_{17})\otimes\Delta(x_\alpha),\quad x_i=j^*(u_i)\quad(i=3, 5, 9, 17)$$

となる．ただし，$\{x_\alpha\}$ は $\{x'_9, x_5{}^2\}$，$\{x_{11}, x_3{}^4\}$，$\{x'_{17}, x_9{}^2\}$ のどれかを含むか，またはつねに $|x_\alpha|\geq 20$ である．$\dim E_6=|x_3{}^3x_5x_{15}x_{17}|+23$ であるから，補題 5.8 によって，$\Delta(x_\alpha)=\Delta(x_{11}, x_3{}^4)$ または $\Delta(x_\alpha)=\Delta(x_{23})$．

$\{x'_9, x_5{}^2\}$ が現われないことは，$\tau(x_9)=u_5{}^2$，従って $x_5{}^2=0$ を示している．(6.13) と，j^* と Sq^i の可換性から，$x_5=Sq^2x_3$，$x_9=Sq^4x_5$，$x_{17}=Sq^8x_9$．

また，Cartan 公式と Adem の関係式 $Sq^1Sq^{2i}=Sq^{2i+1}$ を使って，

$$x_3{}^4=(Sq^3x_3)^2=(Sq^1Sq^2x_3)^2=(Sq^1x_5)^2=Sq^2x_5{}^2=0$$
$$x_9{}^2=(Sq^4x_5)^2=Sq^8x_5{}^2=0$$

故に，$\Delta(x_\alpha)$ は $\Delta(x_{11}, x_3{}^4)$ ではなく，$\Delta(x_\alpha)=\Delta(x_{23})$ である．

(β) $y_2{}^8=0$ の場合には，(α) において，$\boldsymbol{Z}_2[y_2]$ を $\boldsymbol{Z}_2[y_2]/(y_2{}^8)\otimes\Delta(y''_{16})$ におきかえ，$H^*(\Omega\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ に $\Delta(y_{15},\ y''_{16})$ を追加したものになり，

$$H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(x_9)\otimes\boldsymbol{Z}_2[x_{11}, x_{15}, x_{16}, x'_{17}, x''_{17}],\quad 次数<21$$

となることは同様に示される．以下同様な議論で，

$$\tau(x_9)=u_5{}^2,\quad \tau(x_{11})=u_3{}^4,\quad \tau(x_{15})=0,\quad \tau(x_{16})=u_{17},\quad \tau(x'_{17})=u_9{}^2,\quad \tau(x''_{17})=0$$

となり，$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の形は結果的には同じものになる．ただし，x_{17} は $f^*(x_{17})$

$=x''_{17}$ となるものであり，$Sq^8x_9=j^*(Sq^8u_9)=j^*(u_{17})=j^*(\tau(x_{16}))=0$.　(終)

補題 6.14　(1)　補題 6.12 で (β) の場合は起らない．即ち，

$$Sq^8x_9=x_{17},\quad y_2{}^8\neq 0$$

(2)　ファイバー空間 $E_6\to E_6/SU(6)\to BSU(6)$ に関する転入について，x_{15} は転入的で，$\tau(x_{15})=c_4{}^2$．さらに，$x_{23}=Sq^8x_{15}$ にとれて，$\tau(x_{23})=c_6{}^2$ である．

［証明］　(1)　$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\varDelta(x_3,x_5,x_6,x_9,x_{15},x_{17},x_{23})$ において，x_3，$x_5=Sq^2x_3$，$x_6=x_3{}^2=Sq^3x_3$，$x_9=Sq^4x_5$ は転入的であるから，定理 2.7 によって，次数＜16 の範囲で，

$$H^*(BE_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4,y_6,y_7,y_{10}],\quad y_i=\tau(x_{i-1})\ (i=4,6,7,10)$$

$Sq^8x_9=0$ と仮定して矛盾を出す．$Sq^8y_{10}\equiv Sq^8\tau(x_9)\equiv\tau(Sq^8x_9)\equiv 0$ は分解的な元を法として成り立つ．従って，$Sq^8y_{10}=P(y_4,y_6,y_7,y_{10})$ となる多項式 P がある．定理 6.8 の射入で誘導される $\rho : BSU(6)\to BE_6$ は π_4，従って，H^4 の同型を与えるから，$\rho^*(y_4)=c_2$．Sq^2, Sq^4, Sq^8 を順次施すと，(6.10) より，

$$\rho^*(y_6)=c_3,\quad \rho^*(y_{10})=c_5+c_3c_2,\quad \rho^*(Sq^8y_{10})=c_6c_3+c_5c_4+(3\text{ 次以上の項})$$

明らかに，$\rho^*(y_7)=0$．故に，

$$P(c_2,c_3,0,c_5+c_3c_2)=\rho^*P(y_4,\cdots)=\rho^*(Sq^8y_{10})=c_6c_3+c_5c_4+(3\text{ 次以上の項})$$

これは矛盾である．故に $Sq^8x_9\neq 0$．補題 6.12 より，(1) がえられる．

(2)　転入の自然性から，$\tau(x_3)=\rho^*(y_4)=c_2$ である．Sq^i を施して，

$$\tau(x_5)=c_3,\quad \tau(x_9)\equiv c_5 \bmod (c_2,c_3),\quad \tau(x_{17})\equiv 0 \bmod (c_2,c_3,c_5)$$

c_2,c_3,c_5 は $H^*(BSU(6);\ \boldsymbol{Z}_2)$ の正則列であるから，定理 2.24 によって，x_{15} は転入的である．$\tau(x_{15})\neq 0 \Longrightarrow c_2,c_3,c_5,\tau(x_{15})$ も正則列である．$\tau(x_{15})\equiv 0$ の場合もこめて，x_{23} は転入的で，スペクトル系列の計算から，

$$H^*(E_6/SU(6);\ \boldsymbol{Z}_2)\cong\boldsymbol{Z}_2[c_4,c_6]/(\tau(x_{15}),\tau(x_{23}))\otimes\varDelta(x_6,(x_{15}),x_{17},(x_{23}))$$

ただし，(x_{15}) は $\tau(x_{15})=0$ のとき現われ，(x_{23}) も同様とする．$E_6/SU(6)$ は有限次元であるから，$\tau(x_{15})$，$\tau(x_{23})$ はともに 0 でない．次数の関係から明らかに，$\tau(x_{15})=c_4{}^2$，$\tau(x_{23})=c_6{}^2$，$Sq^8(c_4{}^2)=(Sq^4c_4)^2\equiv c_6{}^2 \bmod (c_2,c_3,c_5)$ であるから，$Sq^8x_{15}=x_{23}$.　(終)

系 6.15　$H^*(E_6/SU(6);\ \boldsymbol{Z}_2)=\varLambda(x_6,x_8,x_{12},x_{17})$

［証明］　$x_6{}^2=Sq^6x_6=Sq^2Sq^4x_6=0$.　$x_8{}^2=x_{12}{}^2=x_{17}{}^2=0$ は容易．　(終)

系 6.16　$H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_{32}]\otimes\varDelta(x_9,x_{11},x_{15},x_{17},x_{23},x_{33})$

［証明］ (5.3) (5)，$G=E_6$，に関するスペクトル系列

$$E_2=H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)\otimes H^*(\boldsymbol{Z},2;\ \boldsymbol{Z}_2)\Longrightarrow H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

を使って計算する．$H^*(\boldsymbol{Z},2;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_2]=\Delta(u_2, u_2^2, u_2^4, u_2^8)\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_2^{16}]$ において，$\tau(u_2)=x_3$，$\tau(u_2^2)=x_5$，$\tau(u_2^4)=x_9$，$\tau(u_2^8)=x_{17}$．$\tau(u_2^{16})=Sq^{16}x_{17}=0$ は次数の関係からわかる．このことから，次の結果がえられて系をうる：

$$E_\infty=\Delta(x_3^3\otimes u_2,\ x_5\otimes u_2^2,\ x_9\otimes u_2^4,\ x_{17}\otimes u_2^8,\ x_{15}\otimes 1,\ x_{23}\otimes 1)\otimes\boldsymbol{Z}_2[u_2^{16}]$$ （終）

さらに詳しい構造を知るには次の定理が基本になる．

定理 6.17 (1) $H^{15}(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 x_{15} は普遍転入的ではない．

(2) x_{15} を適当に選べば，$\bar{\phi}(x_{15})=x_3^2\otimes x_9$.

(3) 系 6.16 の生成元 x_i について，

$$Sq^2x_9=x_{11},\quad Sq^4x_{11}=x_{15},\quad Sq^8x_9=x_{17},\quad Sq^8x_{15}=x_{23}$$

［証明］ (1) (5.3) (1) に関するスペクトル系列

$$E_2=H^*(\boldsymbol{Z},4;\ \boldsymbol{Z}_2)\otimes H^*(B\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)\Longrightarrow H^*(BE_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$$

を考える．まず，

$$H^*(\boldsymbol{Z},4;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[u_4, u_6, u_7, u_{10}, u_{11}, u_{13}, u_{18}, u_{19}, \cdots],$$

$$u_6=Sq^2u_4,\quad u_7=Sq^3u_4,\quad u_{10}=Sq^4u_6,\quad u_{11}=Sq^5u_6,\quad u_{13}=Sq^6u_7, \cdots$$

系 6.16 に定理 2.28 (1) と定理 2.7 を適用して，

(6.17)′ $$H^*(B\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[\tilde{y}_{10}, \tilde{y}_{12}, \tilde{y}_{16}, \tilde{y}_{18}],\ \text{次数} <24$$

また，x_3 従って $x_5=Sq^2x_3$，$x_6=x_3^2=Sq^3x_3$，$x_9=Sq^4x_5$，$x_{17}=Sq^8x_9\in H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$，は普遍転入的で，補題 6.12 ($\alpha$) と定理 2.7 より，自然な準同型

$$\boldsymbol{Z}_2[y_4, y_6, y_7, y_{10}, y_{18}]\longrightarrow H^*(BE_6;\ \boldsymbol{Z}_2),\quad y_i=\tau(x_{i-1})$$

は次数<16 で同型，x_{15} が普遍転入的ならば次数<24 で単射である．

これらを比較して，Sq^i の自然性を使えば，$Bj^*: H^*(\boldsymbol{Z},4;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(BE_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ は $Bj^*(u_j)=y_j$ ($j=4, 6, 7, 10, 18$) をみたすことは明らかである．Ker Bj^* の最低次数の元は $u_{11}+au_4u_7$ ($a\in\boldsymbol{Z}_2$) で，これは $\tau(\tilde{y}_{10})$ と一致する．

Adem の関係式，Cartan 公式を使って次のように計算される：

$$\begin{aligned}\tau(Sq^2\tilde{y}_{10})&=Sq^2\tau(\tilde{y}_{10})=Sq^2(u_{11}+au_4u_7)\\&=Sq^2Sq^5Sq^2u_4+a(Sq^2u_4\cdot u_7+u_4Sq^2Sq^3u_4)\\&=Sq^6Sq^3u_4+au_6u_7=u_{13}+au_6u_7\end{aligned}$$

$$\tau(Sq^1Sq^2\tilde{y}_{10})=Sq^1(u_{13}+au_6u_7)=Sq^1Sq^6u_7+a(Sq^1u_6\cdot u_7)$$
$$=Sq^7u_7+au_7{}^2=(1+a)u_7{}^2$$
$$\tau(Sq^4Sq^2\tilde{y}_{10})=Sq^4(u_{13}+au_6u_7)$$
$$=Sq^4Sq^6u_7+a(Sq^4u_6\cdot u_7+Sq^1u_6Sq^3u_7+u_6Sq^4u_7)$$
$$=(Sq^{10}+Sq^9Sq^1+Sq^8Sq^2)u_7+a(u_{10}u_7+u_7Sq^1Sq^2u_7+u_6\cdot Sq^5Sq^2u_4)$$
$$=a(u_7u_{10}+u_6u_{11})\equiv au_7(u_{10}+u_6u_4)$$

故に，$Sq^2\tilde{y}_{10}\neq 0 \Longrightarrow Sq^2\tilde{y}_{10}=\tilde{y}_{12}$．$Sq^1Sq^2\tilde{y}_{10}=0 \Longrightarrow a=1 \Longrightarrow \tau(Sq^4Sq^2\tilde{y}_{10})=u_7(u_{10}+u_6u_4)\in \mathrm{Ker}\, Bj^* \Longrightarrow r_{17}=y_7(y_{10}+y_6y_4)=0$．これは，$x_{15}$ が普遍転入的でないことを示している．

(2) $H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(x_3, x_5, x_3{}^2, x_9, x_{15}, x_{17}, x_{23})$ において，x_3 従って $x_5=Sq^2x_3, x_3{}^2, x_9=Sq^4x_5$ は原始的である．補題 1.11 によって，生成元 x_{15} を x'_{15} にとり直して，

$$\overline{\phi}(x'_{15})=ax_9\otimes x_3{}^2,\quad a\in \boldsymbol{Z}_2$$

に選べる．$E_6=\Omega BE_6$ に定理 2.28 (2) を使って計算すると，

$$H^*(BE_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_4, y_6, y_7, y_{10}, y_{18}]/(r_{17}),\quad \text{次数}<24$$

ここで，$r_{17}\equiv ay_{10}y_7 \mod (y_4, y_6)$ であるが，(1) の証明において，$r_{17}=y_7(y_{10}+y_6y_4) \Longrightarrow a=1$．$x_{15}=x'_{15}+x_3{}^2x_9$ とおいて，(2) は証明される．

(3) (1) の証明から，$Sq^2\tilde{y}_{10}=\tilde{y}_{12}$，$Sq^4\tilde{y}_{12}=Sq^4Sq^2\tilde{y}_{10}\neq 0 \Longrightarrow Sq^4\tilde{y}_{12}=\tilde{y}_{16}$．また，$Sq^8\tau(\tilde{y}_{10})=Sq^8Sq^5u_6+Sq^8(u_4u_7)=Sq^9Sq^4u_6+u_4{}^2Sq^4u_7+Sq^2u_4\cdot Sq^6u_7=u_{19}+u_4{}^2u_7+u_6u_{13}\neq 0$ より，$Sq^8\tilde{y}_{10}=\tilde{y}_{18}$．これらに σ を施すと，(3) の最初の 3 式がえられる．最後の式は補題 6.14 よりえられる． (終)

注意 6.17″ 系 6.16 および定理 6.17 (3) は E_6 のホモトピー群の 2-成分の計算に利用される．

定理 6.18 生成元 $x_i\in H^i(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ があって次をみたす：

$$H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3]/(x_3{}^4)\otimes\Lambda(x_5, x_9, x_{15}, x_{17}, x_{23})$$
$$Sq^2x_3=x_5,\quad Sq^4x_5=x_9,\quad Sq^8x_9=x_{17},\quad Sq^8x_{15}=x_{23},\quad Sq^1x_i=0\ (i\neq 5)$$
$$\overline{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9,\quad \overline{\phi}(x_{23})=x_3{}^2\otimes x_{17}$$

［証明］ $\overline{\phi}(x_{15})$ の式に Sq^8 を施して $\overline{\phi}(x_{23})$ の式をうる．x_{15}^2，x_{17}^2，x_{23}^2 および Sq^1x_i $(i\neq 5)$ は原始的であるから，系 1.17 によってこれらは 0 である．他の関係式は既にえられている． (終)

E_7 の mod 2 コホモロジー

H を G の閉部分群とし，射入で誘導される写像 $Bi: BH\to BG$ を写像柱を使って射入と考え $BH\subset BG\subset K(\boldsymbol{Z},4)$ とする．$B\tilde{G}=\Omega(K(\boldsymbol{Z},4), BG)$ と同様に $B\tilde{H}=\Omega(K(\boldsymbol{Z},4), BH)$ とおけば，自然な対応 $B\tilde{H}\to B\tilde{G}$ がえられる．(5.3) の各ファイバー空間についても，この対応で誘導されるファイバー空間の間の写像，即ち，次の可換な図式がえられる：

(6.19)
$$\begin{array}{ccccccccccc}\cdots\to\tilde{H} & \xrightarrow{f} & H & \xrightarrow{j} & K(\boldsymbol{Z},3) & \longrightarrow & B\tilde{H} & \xrightarrow{Bf} & BH & \longrightarrow & K(\boldsymbol{Z},4)\\ \downarrow\tilde{i} & & \downarrow i & & \downarrow id & & \downarrow B\tilde{i} & & \downarrow Bi & & \downarrow id\\ \cdots\to\tilde{G} & \xrightarrow{f} & G & \xrightarrow{j} & K(\boldsymbol{Z},3) & \longrightarrow & B\tilde{G} & \xrightarrow{Bf} & BG & \longrightarrow & K(\boldsymbol{Z},4)\end{array}$$

ただし，上の列を (5.3) のファイバー空間とみるためには次が必要である．

(6.19)′
$$i_*: \pi_3(H)\cong\pi_3(G)\cong\boldsymbol{Z}$$

なお，次のファイバー空間の列もえられることに注意する（第4章§1参照）：

(6.20)
$$\tilde{H}\xrightarrow{\tilde{i}}\tilde{G}\longrightarrow G/H\longrightarrow B\tilde{H}\xrightarrow{B\tilde{i}}B\tilde{G}$$

補題 6.21　$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9]/(x_3{}^4, x_5{}^4, x_9{}^4)\otimes\Lambda(x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{27})$, $x_5=Sq^2x_3$,　$x_9=Sq^4x_5$,　$x_{17}=Sq^8x_9$

［証明］　定理 6.8 の射入 $i: E_6\to E_7$ の誘導する $\Omega i: \Omega E_6\to\Omega E_7$ は π_2 の同型を与えるから，$\Omega i^*: H^*(\Omega E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(\Omega E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ による $H^2(\Omega E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元 y_2 の像 Ωi^*y_2 は $H^2(\Omega E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の生成元である．補題 6.14 (1) によって，$\Omega i^*(y_2{}^8)=(\Omega i^*y_2)^8\neq 0\Longrightarrow y_2{}^8\neq 0$. E_7 の型は $(3, 11, 15, 19, 23, 27, 35)$ であるから，補題 5.5 によって，次数<31 の範囲で，

$$H^*(\Omega E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[y_2]\otimes\Lambda(y_{10}, y_{14}, y_{18}, y'_{20}, y_{22}, y_{26}, y'_{28})$$
$$H^*(\Omega\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(y_{10}, y_{14}, y_{18}, y'_{20}, y_{22}, y_{26}, y'_{28})$$

定理 2.28 によって，次数<29 の範囲で次の 2 つの可能性がある：

$$H^*(\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\begin{cases}\Lambda(x_{11})\otimes\boldsymbol{Z}_2[x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}] & (x_{11}^2=0)\\ \boldsymbol{Z}_2[x_{11}, x_{15}, x_{19}, x'_{21}, x_{23}, x_{27}] & (x_{11}^2\neq 0)\end{cases}$$

Adem の関係式 $Sq^4Sq^7=Sq^{11}+Sq^9Sq^2$ を使って，$x_{11}^2=Sq^{11}x_{11}=Sq^4Sq^7x_{11}+Sq^9Sq^2x_{11}=0$. 故に，2 番目の場合は起こらない．

定理 5.8 (2) を $G=E_7$ に適用すると，$\tau(x_i)\neq 0$ の可能性は $\tau(x_{11})=u_3{}^4$, $\tau(x_{19})=u_5{}^4$, $\tau(x_{23})=u_3{}^8$ である．ただし，$\tau(x_{11})=u_3{}^4\Longrightarrow\tau(x_{23})=0$. $\dim E_7=133=|x_3{}^3x_5{}^3x_9{}^3x_{17}x_{15}x_{27}|+23$ に注意して，定理 5.8 (2) より，

(α)　$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9]/(x_3{}^4, x_5{}^4, x_9{}^4)\otimes\Delta(x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{27})$

または (β)　$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9]/(x_3{}^8, x_5{}^4, x_9{}^4)\otimes\Delta(x_{11}, x_{15}, x_{17}, x_{27})$

であることがわかる．故に，(β) は起こりえないことをいえばよい．

$i^*: H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ を考える．i^* は H^3 で同型$\Longrightarrow i^*(x_3)=x_3$. Sq^iを施して，$i^*(x_i)=x_i$ $(i=3, 5, 9, 17)$．従って，$i^*(x_3{}^4)=i^*(x_5{}^2)=i^*(x_9{}^2)=0$ (定理 6.18)．(β) の場合，Sq^8x_{15} は E_7 で分解可能であるが E_6 ではそうではない．これは，$i^*(x_{15})$ は分解可能，従って $i^*(x_{15})=0$ をみたすように x_{15} をとり直せることを示している．

ファイバー空間 $E_6\xrightarrow{i}E_7\xrightarrow{p}E_7/E_6$ に関するスペクトル系列を考えると容易に，$x_5{}^2, x_3{}^4=Sq^2x_5{}^2$，$x_9{}^2=Sq^8x_5{}^2$，および (β) の場合の x_{11}, x_{15} は $p^*: H^*(E_7/E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の像，従って次数 66 の元 $x_3{}^4x_5{}^2x_9{}^2x_{11}x_{15}\neq 0$ も p^* の像である．これは，$\dim(E_7/E_6)=\dim E_7-\dim E_6=133-78=55$ に反する．故に，(β)の場合はなく，補題が証明された．　(終)

系 6.22　$H^*(\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_{32}]\otimes\Delta(x_{11}, x_{15}, x_{19}, x_{23}, x_{27}, x_{33}, x_{35})$

［証明］　系 6.16 と同様．x_{19} は $x_5{}^3\otimes u_2{}^2$，x_{35} は $x_9{}^3\otimes u_2{}^4$ に対応する．(終)

補題 6.23　(1)　$\tilde{i}^*: H^*(\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^*(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ は $\tilde{i}^*(x_j)=x_j$ $(j=11, 15, 23)$ をみたす．また，系 6.22 において，$Sq^4x_{11}=x_{15}$，$Sq^8x_{15}=x_{23}$.

(2)　$i^*: H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)\longrightarrow H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ は全射で，$i_*(x_i)=x_i$ $(i=3, 5, 9, 15, 17, 23)$ に補題 6.21 の x_i を選べる．$H^*(E_7/E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(x_{10}, Sq^8x_{10}, x_{27})$.

［証明］　(1)　(6.19)の可換性から，転入 $\tau: H^{11}(\tilde{E}_7;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^{12}(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_2)$ と $\tau': H^{11}(\tilde{E}_6;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^{12}(\boldsymbol{Z}, 3;\ \boldsymbol{Z}_2)$ について，$\tau'=\tau\circ\tilde{i}^*$ が成り立つ．補題 6.12 および補題 6.21 の証明において，$\tau(x_{11})=u_3{}^4=\tau'(x_{11})$ が知られている．故に，$\tilde{i}^*(x_{11})=x_{11}$．後半は $\tilde{i}^*$ と Sq^4，Sq^8 の可換性よりえられる．

(2)　(6.19)の可換性から，$x_{15}\in H^{15}(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ について，$f^*i^*x_{15}=\tilde{i}^*f^*x_{15}\neq 0\Longrightarrow i^*x_{15}$ は分解不可能．これから (2) は容易にえられる．　(終)

定理 6.24　生成元 $x_i\in H^i(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ があって，次をみたす：

$$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9]/(x_3{}^4, x_5{}^4, x_9{}^4)\otimes\Lambda(x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{27})$$

$$Sq^2x_3=x_5,\quad Sq^4x_5=x_9,\quad Sq^8x_9=x_{17},\quad Sq^8x_{15}=x_{23},\quad Sq^4x_{23}=x_{27}$$

$$\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9+x_5{}^2\otimes x_5,\quad \bar{\phi}(x_{23})=x_3{}^2\otimes x_{17}+x_9{}^2\otimes x_5$$

$$\bar{\phi}(x_{27})=x_5{}^2\otimes x_{17}+x_9{}^2\otimes x_9$$

［証明］　補題 6.23 の生成元の外に $x_{27}=Sq^4x_{23}$ とおく．i^* は Hopf 代数の準同型であることと定理 6.18 より，$\bar{\phi}(x_{15})-x_3{}^2\otimes x_9$ は $i^*\otimes i^*$ の核に入る．i^*の核を考えると，$\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9+ax_5{}^2\otimes x_5+bx_5\otimes x_5{}^2$ $(a, b\in \boldsymbol{Z}_2)$ と書けることがわかる．Cartan 公式を使って，

$$\bar{\phi}(Sq^4x_{15})=x_5{}^2\otimes x_9+ax_5{}^2\otimes x_9+bx_9\otimes x_5{}^2$$

がえられる．Sq^4x_{15} は分解的で x_3, x_5, x_9 の多項式で書けるから，$\bar{\phi}(Sq^4x_{15})$ は対称 $\Longrightarrow 1+a=b$．$b=1$ のときは x_{15} を $x_{15}+x_5{}^2x_9$ でおきかえることにすれば $\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9+x_5{}^2\otimes x_5$ となる．これに Sq^8, Sq^4Sq^8 を施して，$\bar{\phi}(x_{23})$，$\bar{\phi}(x_{27})$ の式がえられる．$x_{15}^2, x_{23}^2, x_{27}^2$ は原始的であるから系 1.17 によって 0 である．x_{27} が分解可能でないことは，$\bar{\phi}(x_5{}^2x_{17})=x_5{}^2\otimes x_{17}+x_{17}\otimes x_5{}^2$ で，$x_{27}, x_5{}^2x_{17}$ 以外にこのような $\bar{\phi}$ の像をもつ単項式のないことからわかる．　(終)

系 6.25　系 6.22 において，$Sq^4x_{11}=x_{15}$，$Sq^8x_{15}=x_{23}$，$Sq^8x_{11}=x_{19}$，$Sq^4x_{23}=x_{27}$．

注意 6.26　$H^*(Ad(E_7);\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_1, x_5, x_9]/(x_1{}^4, x_5{}^4, x_9{}^4)\otimes\Lambda(x_6, x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{27})$

E_8 の mod 2 コホモロジー

補題 6.27　(1)　次数＜32 の範囲で次の 2 つの可能性がある：

(α)　$H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_{15}, x_{23}, x_{27}, x_{29}]$

(β)　$H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(x_{15}, x_{23}, x_{27})$

(2)　次数＜23 の範囲で，

$$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9, x_{15}, x_{17}],\quad x_5=Sq^2x_3,\ x_9=Sq^4x_5,\ x_{17}=Sq^8x_9$$

［証明］　E_8 の型は (3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59) である．定理 6.8 の射入 $E_7\to E_8$ と補題 5.5 を使えば，補題 6.20 の証明の前半と同様に，

$$H^*(\Omega\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Delta(y_{14}, y_{22}, y_{26}, y_{28}'),\quad \text{次数}<31$$

および (1) がえられる．(2) は定理 5.8 より容易にえられる．　(終)

さらに高い次数の結果をうるために，E_8 の部分群 $A_8=SU(9)/\boldsymbol{Z}_3$ を考える．T^8 を $SU(9)$ の対角行列の作る極大トーラスとすれば，$T=T^8/\boldsymbol{Z}_3$ は A_8，従って E_8 の極大トーラスである．$H^*(B\boldsymbol{Z}_3;\ \boldsymbol{Z}_2)$ は自明であるから，ファイバー空間

$$BZ_3 \longrightarrow BSU(9) \longrightarrow BA_8, \quad BZ_3 \longrightarrow BT^8 \longrightarrow BT$$

を考えることによって，同型 $H^*(BA_8; Z_2) \cong H^*(BSU(9); Z_2)$，$H^*(BT; Z_2) \cong H^*(BT^8; Z_2)$ がえられる．よって，これらを同一視する．また，$SU(9)/T^8 \cong A_8/T$ (同相)である．以上のことと第3章の結果より，

(6.28)　(1)　$H^*(BA_8; Z_2) = Z_2[c_2, c_3, c_4, \cdots, c_9]$

(2)　T-バンドル $A_8 \to A_8/T$ を誘導する写像 $A_8/T \to BT$ は全射 $H^*(BT; Z_2) \to H^*(A_8/T; Z_2)$ を与える．

補題 6.29　射影 $E_8/T \to E_8/A_8$ は単射 $H^*(E_8/A_8; Z_2) \to H^*(E_8/T; Z_2)$ を誘導する．従って，$H^*(E_8/A_8; Z_2)$ は偶数次数の元のみより成る．

［証明］　(6.28) (2)の写像は $A_8/T \xrightarrow{i} E_8/T \to BT$ と分解されるから，$i^*: H^*(E_8/T; Z_2) \to H^*(A_8/T; Z_2)$ は全射，即ち A_8/T は E_8/T において mod 2 全体的非0-ホモローグ．従って，前半がえられ，後半は第6章定理4.21より明らかである．(終)

定理 6.30　E_7 は E_8 において mod 2 全体的非0-ホモローグである．即ち，$i^*: H^*(E_8; Z_2) \to H^*(E_7; Z_2)$ は全射，従って $p^*: H^*(E_8/E_7; Z_2) \to H^*(E_8; Z_2)$ は単射かつ $H^*(E_7; Z_2) \cong H^*(E_8; Z_2)/(\mathrm{Im}\, p^+)$.

［証明］　定理6.24によって，$H^*(E_7; Z_2)$ の生成元は x_3 および x_{15} に Sq^i を何回か施してえられる．従って，x_3, x_{15} が i^* の像であることを示せばよい．x_3 については明らかであるから，$i^*(x_{15})$ が分解可能でないことを示せばよい．

ファイバー空間 $E_8 \to E_8/A_8 \to BA_8$ に関するスペクトル系列

$$E_2 = H^*(BA_8; Z_2) \otimes H^*(E_8; Z_2) \Longrightarrow H^*(E_8/A_8; Z_2)$$

を次数 <23 の範囲で考える．$\pi_3(A_8) \cong \pi_3(E_8)$ より，$\tau(x_3) = c_2$ であることがわかる．τ と Sq^i の可換性から，

$$\tau(x_5) = Sq^2 c_2 = c_3, \quad \tau(x_9) = Sq^4 c_3 = c_5, \quad \tau(x_{17}) = Sq^8 c_5 = c_9$$

$H^*(BA_8; Z_2)$ は偶数次数のみであるから，$\tau(x_3{}^2) = \tau(x_5{}^2) = \tau(x_9{}^2) = 0$. また，定理2.24によって，$x_{15}$ は転入的で

$$\tau(x_{15}) \equiv ac_8 + bc_4{}^2 \mod (c_2, c_3, c_5) \quad (a, b \in Z_2)$$

と書ける．ここで，$a = b = 0$ ならば $1 \otimes x_{15} \in E_\infty^{0,15}$ は $H^{15}(E_8/A_8; Z_2)$ の0でない元を与えて補題6.29に反する．故に，$a \neq 0$ または $b \neq 0$.

$a \neq 0$ とすれば，$\tau(Sq^2 x_{15}) = Sq^2(c_8 + bc_4{}^2) = c_9 = \tau(x_{17})$ となるから，$Sq^2 x_{15} =$

$x_{17} \Longrightarrow Sq^2(i^*x_{15})=i^*x_{17}$. i^*x_{15} が分解可能であれば，$i^*x_{17}=x_{17}\in H^{17}(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ が分解可能となり定理 6.24 に反する．故に，x_{15} は分解不可能．

$a=0$，$b\neq 0$ のときは，右の可換図式より，τ の自然性がえられるから，$\tau(i'^*x_{15})=c_4{}^2\in H^{16}(BSU(6);\ \boldsymbol{Z}_2)$ となる．補題 6.14 (2) によって，i'^*x_{15}，従って，x_{15} は分解可能でないことがわかる．

$$\begin{array}{ccccc} E_6 & \longrightarrow & E_6/SU(6) & \longrightarrow & BSU(6) \\ \downarrow{\scriptstyle i'} & & \downarrow & & \downarrow \\ E_8 & \longrightarrow & E_8/A_8 & \longrightarrow & BA_8 \end{array}$$

(終)

注意 6.31　後の結果を使えば $\tau(x_{15})=c_8+c_4{}^2$ であることがわかる．

定理 6.32　生成元 $x_{15}\in H^{15}(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)$ を適当にとれば，

$$\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9+x_5{}^2\otimes x_5+x_3{}^4\otimes x_3$$

をみたす．このとき，$x_{23}=Sq^8x_{15}$，$x_{27}=Sq^4x_{23}$，$x_{29}=Sq^2x_{27}$ とおけば $x_{15}^2=Sq^1x_{29}$ であり，次がみたされる：

$$\bar{\phi}(x_{23})=x_3{}^2\otimes x_{17}+x_9{}^2\otimes x_5+x_5{}^4\otimes x_3,\quad \bar{\phi}(x_{27})=x_5{}^2\otimes x_{17}+x_9{}^2\otimes x_9+x_3{}^8\otimes x_3$$

$$\bar{\phi}(x_{29})=x_3{}^4\otimes x_{17}+x_5{}^4\otimes x_9+x_3{}^8\otimes x_5,\quad \bar{\phi}(x_{15}^2)=x_3{}^4\otimes x_9{}^2+x_5{}^4\otimes x_5{}^2+x_3{}^8\otimes x_3{}^2$$

［証明］　$i^*: H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)\to H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ の核は，次数 ≤ 15 で $x_3{}^4$ で生成される．x_{15} を $i^*(x_{15})=x_{15}\in H^{15}(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ にとれば，定理 6.24 より，

$$\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^2\otimes x_9+x_5{}^2\otimes x_5+ax_3{}^4\otimes x_3+bx_3\otimes x_3{}^4\quad (a, b\in \boldsymbol{Z}_2)$$

と書けることがわかる．$Sq^2(x_{15})=P(x_3, x_5, x_9, x_{17})$ であるから，$\bar{\phi}(Sq^2x_{15})$ は対称である．一方，

$$\bar{\phi}(Sq^2x_{15})=Sq^2\bar{\phi}(x_{15})=x_3{}^4\otimes x_5+ax_3{}^4\otimes x_5+bx_5\otimes x_3{}^4$$

であるから，$a+1=b$. $b=1$ のときは x_{15} を $x_{15}+x_3{}^5$ でおきかえることによって，$a=1$，$b=0$ となる．$\bar{\phi}$ の残りの式は Sq^8，Sq^4，Sq^2，Sq^1 を施して求められる．Adem の関係式 $Sq^{15}=Sq^1Sq^2Sq^4Sq^8$ を使って，$x_{15}^2=Sq^{15}x_{15}=Sq^1x_{29}$ がえられる．　(終)

定理 6.33　補題 6.27 (2) および定理 6.32 の生成元 x_i について次が成り立つ：

$$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9, x_{15}]/(x_3{}^{16}, x_5{}^8, x_9{}^4, x_{15}^4)\otimes\Lambda(x_{17}, x_{23}, x_{27}, x_{29})$$

$$Sq^1x_3=0,\quad Sq^1x_{2i-1}=x_i{}^2\quad (i=3, 5, 9, 15)$$

$$Sq^1x_{15}=x_5{}^2x_3{}^2,\quad Sq^1x_{23}=x_9{}^2x_3{}^2,\quad Sq^1x_{27}=x_9{}^2x_5{}^2$$

$$Sq^2x_3=x_5,\quad Sq^2x_{15}=x_{17},\quad Sq^2x_{27}=x_{29},\quad Sq^2x_i=0\quad (i=5, 9, 17, 23, 29)$$

$$Sq^4x_5=x_9,\ \ Sq^4x_{23}=x_{27},\ \ Sq^8x_9=x_{17},\ \ Sq^8x_{15}=x_{23}$$

その他の Sq^4x_i, Sq^8x_i および $Sq^{16}x_i$ は0である．

［証明］ 定理5.8(2)によって，補題6.27(1)より $H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)$ を求めるとき，$\tau(x_{15})=\tau(x_{27})=0$ $(=\tau(x_{29}))$ であり，問題は $\tau(x_{23})$ が0か $u_3{}^8$ の何れかということである．$\tau(x_{23})=u_3{}^8$ であれば，次数23に生成元はないから，Sq^8x_{15} は分解可能で $ax_3x_5x_{15}+P(x_3, x_5, x_9, x_{17})$ の形である．しかし，$\bar{\phi}(x_{23})$ を計算すると定理6.32の形にはならないことがわかる．故に $\tau(x_{23})=0$ で，定理5.8(2)と補題5.7(2)を使って，補題6.27(1)の (α), (β) の場合に応じてそれぞれ

(α) $$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9, x_{15}]/(x_3{}^{16},\ x_5{}^8,\ x_9{}^4,\ x_{15}^4)\otimes\Lambda(x_{17},\ x_{23},\ x_{27}, x_{29})$$

(β) $$H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_3, x_5, x_9]/(x_3{}^{16}, x_5{}^8, x_9{}^4)\otimes\Lambda(x_{15}, x_{17}, x_{23}, x_{27}, x_{59})$$

となる．(β)の場合は $x_{29}=Sq^2x_{27}$ は分解可能であるが，$\bar{\phi}$ を考えて矛盾であることがわかる．故に(α)が成り立つ．$\bar{\phi}$ を計算すると，$x_{17}^2, x_{23}^2, x_{27}^2, x_{29}^2$ および定理に挙げた以外の $Sq^{2^j}x_i$ は原始的であることがわかり，系1.17によって0となる．$Sq^1x_{15}-x_5{}^2x_3{}^2$ も原始的であるから $Sq^1x_{15}=x_2{}^2x_3{}^2$. Sq^1x_{23}, Sq^1x_{27} についても同様．

今までの結果をみると，$Sq^2x_{15}=x_{17}$ の証明だけが残っている．このためには定理6.30の証明に見られるように，$\tau(x_{15})=c_8+bc_4{}^2$ であることを示せばよい．そうでないとすれば $\tau(x_{15})=c_4{}^2$ である．ここで，補題6.27においても(α)の場合であり，$x_{15}^2=Sq^1Sq^{14}x_{15}\neq 0\Longrightarrow Sq^{14}x_{15}=x_{29}$ に注意して，$\tau(x_{29})=Sq^{14}c_4{}^2=(Sq^7c_4)^2=0$ をうる．即ち，x_{29} は $H^{29}(E_8/A_8;\ \boldsymbol{Z}_2)$ からの像となり，補題6.29に反する．従って，$\tau(x_{15})=c_8+bx_4{}^2\Longrightarrow Sq^2x_{15}=x_{17}$.　（終）

系 6.34 定理6.33の関係式は $x_3{}^4=x_5{}^4=x_9{}^4=x_9=0$ とおくことによって $H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$ でも成り立つ．また，さらに $x_5{}^2=x_9{}^2=x_{27}=0$ とおくことによって $H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ でも成り立つ．

注意 6.35 Adem の関係式，Cartan 公式等を使えば，定理6.33の関係式は $H^*(E_8;\ \boldsymbol{Z}_2)$ における Sq^i の状態を完全に記述していることがわかる．$H^*(E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)$, $H^*(E_6;\ \boldsymbol{Z}_2)$ についても系6.34によって同じことがいえる．

系 6.36 $$H^*(E_8/E_7;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_{12}]/(x_{12}^4)\otimes\Lambda(x_{20}, x_{29}, x_{30})$$

系 6.37 $$H^*(\tilde{E}_8;\ \boldsymbol{Z}_2)=\boldsymbol{Z}_2[x_{32}, x_{15}]/(x_{15}^2)\otimes\Lambda(x_{23}, x_{27}, x_{29}, x_{33}, x_{39}, x_{47}),$$

$x_{23}=Sq^8x_{15}$,　$x_{27}=Sq^4x_{23}$,　$x_{29}=Sq^2x_{27}$

注意 6.38　次の部分群の列があって，各部分群はそれを含む群の中で mod 2 全体的非 0-ホモローグである：

$$S^3\subset SU(3)\subset G_2\subset \mathrm{Spin}(7)\subset \mathrm{Spin}(9)\subset F_4\subset E_6\subset E_7\subset E_8$$

特に，$E_6/F_4=EIV$ について，

$$H^*(E_6/F_4;\ \boldsymbol{Z}_2)=\Lambda(x_9, Sq^8x_9)$$

あとがき

下巻で書けなかったことのうち，若干を簡単にのべる.

コンパクト連結 Lie 群の(複素)表現環

G はコンパクト連結 Lie 群，T^l はその極大トーラスとする ($l=\mathrm{rank}\,G$). ここでは，基礎体は $\boldsymbol{C}$ とする. 従って，G の表現空間 V は $\boldsymbol{C}$ 上のものであり，連続準同型 $\theta: G\to \mathrm{Aut}\,V$ によって，V の G-加群としての構造が与えられている.

定義 $R(G)=$(既約 G-加群の同値類により生成される自由可換群)

定義により，既約 G-加群(の同値類)を V_i とすると $R(G)$ の元は $\sum n_i V_i, n_i \in \boldsymbol{Z}$ は有限個を除いて 0，という形をしているが，

(1) 任意の G-加群は既約 G-加群の直和,

(2) $\sum m_i V_i \cong \sum n_i V_i \Longrightarrow$ すべての i について，$m_i=n_i$,

という性質から，次の 1 対 1 対応のあることがわかる：

$$\{G\text{-加群の同値類}\}\longleftrightarrow\{\textstyle\sum n_i V_i\in R(G)\mid n_i\geq 0\}$$

表現のテンソル積により $R(G)$ に積が入り，$R(G)$ は環になるが，このとき $R(G)$ を G の**表現環**という.

G-加群 V に対してその**指標** χ_V を

$$\chi_V: G\longrightarrow \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow \chi_V(g)=\mathrm{tr}\,\theta(g),\quad g\in G$$

で定義すると，χ_V は連続で，tr の性質から次のことがわかる：

(3) $$\chi_V(hgh^{-1})=\chi_V(g),\qquad h,g\in G$$

(4) $$\chi_{V\oplus W}(g)=\chi_V(g)+\chi_W(g),\quad g\in G$$

(5) $$\chi_{V\otimes W}(g)=\chi_V(g)\cdot\chi_W(g),\quad g\in G$$

$\mathcal{C}l(G)=\{f: G\to \boldsymbol{C}\mid f(hgh^{-1})=f(g),\ h,g\in G\}$ とおき，可換群の準同型を

$$\chi: R(G)\longrightarrow \mathcal{C}l(G) \Longleftrightarrow \chi(\textstyle\sum n_i V_i)=\sum n_i\chi_i$$

と定義する. ただし，χ_i は V_i の指標. このとき任意の G-加群 V に対して χ

$(V)=\chi_V$ であり，χ は環準同型となる．さらに次のことが証明される：

定理 6　$\chi: R(G) \longrightarrow \mathcal{C}l(G)$ は単射である．

このとき $\mathrm{Im}\,\chi=\mathcal{C}h(G)$ とおき，G の**指標環**とよぶ．

(3) と第 5 章定理 3.15 により，

(7)　χ_V は T^l への制限によりきまり，Weyl 群 $W(G)$ の作用で不変であることがわかる．従って，射入 $i: T^l \to G$ に対して，

定理 8　$i^*: R(G) \longrightarrow R(T^l)$ は単射であり，

$$\mathrm{Im}\,i^* \subset R(T^l)^{W(G)} = (W(G) \text{ で不変な } R(T^l) \text{ の部分環})$$

いま，$A=G$ が可換群で，V を既約 A-加群とすると，$\theta(a): V \to V$, $a \in A$, は A-加群の(準)同型になるから，Schur の補題が適用できて，$\theta(a)$ に対してある $\lambda(a) \in \boldsymbol{C}$ が存在して，

$$\theta(a)\boldsymbol{v}=\lambda(a)\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \in V$$

となる．ゆえに，V の部分空間はすべて A-不変となるから，V の既約性により $\dim V=1$. 従って，$\theta=\lambda: A \to \mathrm{Aut}\,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}^*$, $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$ (乗法群)．特に，$\lambda(A) \subset S^1 \subset \boldsymbol{C}^*$ と考えられる．

準同型 $\alpha': T^1 \to T^1$ は $\alpha'(x) \equiv nx \pmod 1$ という形をしているから，準同型 $\alpha: T^l \to T^1$ は $\alpha(x_1, \cdots, x_l) \equiv \sum n_i x_i \pmod 1$, $n_i \in \boldsymbol{Z}$, と表わせる．対応 $x \mapsto \exp(2\pi \boldsymbol{i} x)$ により $T^1 \cong S^1$ であるから，既約 T^l-加群では λ は

$$\lambda(x_1, \cdots, x_l)=\exp(2\pi \boldsymbol{i} \textstyle\sum n_j x_j) \in \boldsymbol{C}^*$$

という形の作用をもっていることがわかる．今，α_j, $1 \leq j \leq l$, をその作用が

$$\lambda(x_1, \cdots, x_l)=\exp(2\pi \boldsymbol{i} x_j), \quad 1 \leq j \leq l$$

で定義される T^l-加群とすると，任意の $n_j \in \boldsymbol{Z}$ に対して

$$\lambda(x_1, \cdots, x_l)=\exp(2\pi \boldsymbol{i}(n_1 x_1+\cdots+n_l x_l))$$

で与えられる $\alpha_1^{n_1} \cdots \alpha_l^{n_l}$ も T^l-加群であり，次の定理がえられる．

定理 9　$R(T^l) \cong \boldsymbol{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \cdots, \alpha_l, \alpha_l^{-1}]$

Weyl 群 $W(G)$ が $L(T^l)^*$ に作用することを思いおこそう．weight $h \in L(T^l)^*$ に対して，初等対称和 $S(h) \in \boldsymbol{C}$ を

$$S(h)=\sum \exp(2\pi \boldsymbol{i} \varphi h) \quad (\text{和はすべての } \varphi \in W(G))$$

と定義するとき，明らかに，集合 $\{S(h) \mid h \text{ は } W(G)\text{-軌道の代表元}\}$ は $R(T^l)$ の $W(G)$-不変な元全体の ($\boldsymbol{Z}$ 上の)基底になっている．このとき，指標を

詳しく調べることにより，次の1対1対応のあることがわかる：

$$\{G\text{ の既約表現}\}\longleftrightarrow\{R(T^l)\text{ における初等対称和}\}$$

定理 10 G がコンパクト連結 Lie 群ならば $R(G)\cong R(T^l)^{W(G)}$.

G が単連結のときは，$L(T^l)^*$ における weight に半順序を入れることにより，さらに詳しいことがわかる：

定理 11 $\pi_1(G)=0$ ならば，$R(G)\cong \boldsymbol{Z}[\rho_1,\cdots,\rho_l]$.

ここで，$\pi_1(G)=0$ のとき，G は l 個の単純 root $\alpha_1,\cdots,\alpha_l$ と $\dfrac{2(\alpha_r,w_t)}{(\alpha_r,\alpha_r)}=\delta_{rt}$ をみたす基本 weight $w_1,\cdots,w_l$ をもつ．このとき，$\rho_1,\cdots,\rho_l$ は G の既約表現で

$$\chi(\rho_r)\,|\,T^l=S(w_r)+(\text{順序の低い項})$$

をみたすものである．

以上の詳細については下記の文献を参照されたい：

[1] J.F. Adams: Lectures on Lie groups, W.A. Benjamin, 1969,

[2] D. Husemoller: Fibre bundles, McGraw-Hill, 1966,

[3] 横田一郎：群と表現，裳華房，1973.

$K^*(G)$ (Hodgkin の定理)

有限 CW-複体 X の n-切片を X^n とおくとき，一般コホモロジー h^* に対して，$Z_r^{p,q}=\mathrm{Im}\,(h^{p+q}(X^{p+r-1},X^{p-1})\to h^{p+q}(X^p,X^{p-1}))$, $B_r^{p,q}=\mathrm{Ker}\,(h^{p+q}(X^p,X^{p-1})\to h^{p+q}(X^p,X^{p-r}))$, $E_r^{p,q}=Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}$ とおいて，次の性質をみたすスペクトル系列 $\{E_r(X),d_r\}$ がえられる：

$$E_2^{p,q}\cong H^p(X,h^q(x_0)),\quad x_0\in X$$

$$E_\infty^{p,q}\cong Gr(h^{p+q}(X))=h_p^{p+q}(X)/h_{p+1}^{p+q}(X),\quad (h_p{}^n(X)=\mathrm{Ker}(h^n(X)\to h^n(X^{p-1}))$$

$$d_r:E_r^{p,q}\longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$$

このスペクトル系列は **Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列** [6] とよばれる．p を素数とし，これを特に，$h^*(\quad)=K^*(\quad;\boldsymbol{Z}_p)$ に適用する．ただし，$K^*(X,A;\boldsymbol{Z}_p)=K^*((X,A)\times(M_p,*))$ と定義される $(M_p=S^1\underset{p}{\cup}e^2)$．このスペクトル系列を以下 $\{E_r(X;\boldsymbol{Z}_p),d_r\}$ と表わすことにする．　r：偶数$\Longrightarrow d_r=0$.

いま，$d_i=0$, $1<i<r\ (\leq 2p-1)$, r は奇数と仮定すると $d_r:H^q(X;\boldsymbol{Z}_p)\to H^{q+r}(X;\boldsymbol{Z}_p)$ は安定 r 次コホモロジー作用素であるから r 次元の Steenrod 代数 $\mathscr{A}_p{}^r$ の元である．ここで，$\mathscr{A}_p{}^r=0\ (2\leq r<2p-2)$ であるから，

(12)　$d_r=0$ $(2\leq r\leq 2p-2)$, 従って $H^q(X;\boldsymbol{Z}_p)\cong E_r{}^q(X;\boldsymbol{Z}_p)$ $(2\leq r\leq 2p-1)$.

従って，最初の自明でない微分作用素は $d_{2p-1}\in\mathcal{A}_p^{2p-1}$ であるが，$\mathcal{A}_p^{2p-1}$ の基底は $\mathcal{P}^1\beta$ と $\beta\mathcal{P}^1$ であるから($p=2$ のときは $\mathcal{P}^1=Sq^2$, $\beta=Sq^1$),

$$d_{2p-1}=a\mathcal{P}^1\beta+b\beta\mathcal{P}^1 \quad a,b\in\boldsymbol{Z}_p$$

$d_{2p-1}\circ d_{2p-1}=0$ より $a+b=0$. さらに，d_{2p-1} を特定の空間の上で評価することにより $d_{2p-1}\neq 0$ が示せて，

(13)
$$d_{2p-1}=Q_1=\mathcal{P}^1\beta-\beta\mathcal{P}^1$$

補題 14　$\dim_p K^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)\geq\dim_{\boldsymbol{Q}}K^*(X;\ \boldsymbol{Q})$　$(K^*(X;\ \boldsymbol{Q})=K^*(X)\otimes\boldsymbol{Q})$

特に，等号成立$\Longleftrightarrow K^*(X)$ は p-torsion をもたない.

〔証明〕 $K^*(X)=F\oplus P\oplus T$ とおく．ただし $F=$(極大自由部分群)，$P=$(位数が p 巾の元の部分群)，$T=$(位数が p と素な元の部分群)．このとき，

$$K^*(X;\ \boldsymbol{Z}_p)=(F\otimes\boldsymbol{Z}_p)\oplus(P\otimes\boldsymbol{Z}_p)\oplus\mathrm{Tor}(P,\boldsymbol{Z}_p),\quad K^*(X;\ \boldsymbol{Q})=F\otimes\boldsymbol{Q}$$

ここで，$\dim_{\boldsymbol{Q}}F\otimes\boldsymbol{Q}=\dim_p F\otimes\boldsymbol{Z}_p$. 一方，

$P\otimes\boldsymbol{Z}_p=\mathrm{Tor}(P,\boldsymbol{Z}_p)=0\Longleftrightarrow P=0\Longleftrightarrow K^*(X)$ は p-torsion をもたない.(終)

$K^*(\quad;\boldsymbol{Q})$に関する Atiyah-Hirzebruch スペクトル系列は自明であることを用いれば次がえられる.

補題 15　$K^*(X)$ は p-torsion をもつ$\Longrightarrow H^*(X)$ は p-torsion をもつ.

定理 16　G は単純，単連結 Lie 群ならば，$K^*(G)$ は torsion をもたない.

記号　$\theta=\{(G,p)\mid H^*(G)$ は p-torsion をもつ$\}$

第 6 章の結果によれば，θ は次の表で与えられる：

$p=2$　$G=\mathrm{Spin}(n)$ $(n\geq 7)$, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8

$p=3$　$G=F_4$, E_6, E_7, E_8

$p=5$　$G=E_8$

補題 15 により，$(G,p)\notin\theta$ ならば $K^*(G)$ は p-torsion をもたないから，定理 16 を示すためには次を示せば十分である：

(17)　$(G,p)\in\theta\Longrightarrow K^*(G)$ は p-torsion をもたない.

rank $G=l$ とすると $\dim_{\boldsymbol{Q}}K^*(G;\ \boldsymbol{Q})=\dim_{\boldsymbol{Q}}H^*(G;\ \boldsymbol{Q})=2^l$ であるから補題 14 により (17) は次のものと同値である：

(17)′　$(G,p)\in\theta\Longrightarrow\dim_p K^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=2^l$

補題 18　(1)　$\theta\ni(G,p)\neq(E_7,2)$, $(E_8,2)\Longrightarrow\dim_p E_{2p}(G;\ \boldsymbol{Z}_p)=2^l$

(2)　$G=E_7, E_8 \Longrightarrow \dim_2 E_6(G;\ \boldsymbol{Z}_2)=2^l$

この証明においては $H^*(G;\ \boldsymbol{Z}_p)$ の $\mathcal{A}_p$ 上の結果および(13)が有用な役割を果たす．このようにして定理16は証明されるが詳細は [7] を参照されたい．

G が半単純，1-連結 Lie 群の場合，第5章定理 5.30 によって $G=G_1\times\cdots\times G_k$ (G_i：単純) と分解され，定理16により $K^*(G_i)$ は自由であるから，Künneth の公式が使えて $K^*(G)=K^*(G_1)\otimes\cdots\otimes K^*(G_k)$．従って，

定理 16′　G が半単純，1-連結ならば，$K^*(G)$ は torsion をもたない．

以上のように，定理16の証明には Lie 群 G の個々の性質を用いたが [4] において Araki は分類定理を用いない証明を与えている．

G の表現 $\rho : G\to U(n)$ を単に連続写像とみなすことにより $K^1(G)$ の元をえるが，これを $\beta(\rho)$ と表わすことにする．G の極大トーラス T の指標群 $\hat{T}$ の基底をなす基本 weight $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ に対応する既約表現を $\rho_1, \cdots, \rho_l$ とし，$a=\prod\beta(\rho_i)\in K^*(G)$ とおく．写像 $\pi : (G/T)\times G\to G$ ($\Longleftrightarrow \pi(gT, u)=gug^{-1}$ の誘導する準同型 $\pi^* : K^*(G)\to K^*((G/T)\times T)\cong K^*(G/T)\otimes K^*(T)$ について次が成り立つ：

(19)　$ch\,\pi^*(a)[(G/T)\times T]=|W(G)|$　($W(G)$ の位数)

ただし，左辺は $\pi^*(a)$ の Chern 指標を $(G/T)\times T$ の基本ホモロジー類の上で評価したものである．π の写像度は $|W(G)|$ であるから，

定理 20　$(ch\ a)[G]=1$

Hopf の定理(第4章定理 6.26)により $H^*(G;\ \boldsymbol{Q})\cong \Lambda(x_1, \cdots, x_l)$，$|x_i|=$奇数，であり，Chern 指標 ch は $\boldsymbol{Q}$-係数については同型であるから，

$$\mathrm{rank}\ K^*(G)=\mathrm{rank}\ H^*(G)=2^l$$

いま，$j : \Lambda=\Lambda(e_1, \cdots, e_l)\to K^*(G) \Longleftrightarrow j(e_i)=\beta(\rho_i)$ と定義すると定理20により j は単射．一方，$\mathrm{rank}\ \Lambda=2^l=\mathrm{rank}\ K^*(G)$ であるから $[K^*(G) : \Lambda]=$有限．G は parallelizable であるから，Riemann-Roch の定理 [6] が適用できて，準同型 $f_! : K^*(G)\to \boldsymbol{Z}$ が存在し，$f_!x=(ch\ x)[G]$，$x\in K^*(G)$，であることがわかる．従って，準同型

$$k : K^*(G)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\Lambda, \boldsymbol{Z}) \Longleftrightarrow k(x)y=f_!(xj(y)) \quad x\in K^*(G),\ y\in\Lambda$$

を定義できて，このとき定理20より $k\circ j : \Lambda\cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\Lambda, \boldsymbol{Z}) \Longrightarrow j(\Lambda)$ は $K^*(G)$ の直和因子 $\Longrightarrow j(\Lambda)=K^*(G) \Longrightarrow j : \Lambda\cong K^*(G)$．このようにして，

定理 21　G は半単純，1-連結コンパクト Lie 群，rank $G=l$ とすると

$$K^*(G)=\Lambda(\beta(\rho_1),\cdots,\beta(\rho_l))$$

以上の詳細については次の文献を参照されたい．

[4]　S. Araki : Hopf structures attached to K-theory : Hodgkin's theorem Ann. Math., 85 (1967), 508-525,

[5]　M.F. Atiyah : On the K-theory of compact Lie groups, Topology 4(1965), 65-99,

[6]　M.F. Atiyah - F. Hirzebruch : Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Symp. Pure Math. III AMS, (1961), 7-38,

[7]　L. Hodgkin : On the K-theory of Lie groups, Topology, 6(1967), 1-36.

等質空間の *K*-群

G はコンパクト Lie 群とする．位相空間 X について，連続写像 $G\times X\to X$ があって，$ex=x$, $g_1(g_2x)=(g_1g_2)x$, e (単位元), $g_i\in G$, $x\in X$, をみたすとき X は ***G*-空間**とよばれる．G-空間の間の写像が G の作用と可換なとき，この写像を ***G*-写像**という．G-空間 X 上の ***G*-ベクトルバンドル**は次の性質をみたす 3 対 (E, p, X) から成る：

(1)　E は G-空間，　(2)　$p: E\to X$ は G-写像，

(3)　$g\in G$ について，$g: p^{-1}(x)\to p^{-1}(gx)$ は線型写像．

X はコンパクト G-空間とする．X 上の G-ベクトルバンドルの同値類は直和により可換半群 $E_G(X)$ になる．このとき，$K_G(X)=E_G(X)/\{E_1\oplus E_2-E_1-E_2\}$ と定義し，**equivariant *K*-群**という．二つの G-ベクトルバンドルのテンソル積は (G は対角に作用して) G-ベクトルバンドルになることから $K_G(X)$ は可換環になる．通常の K-群の場合と同様に，任意の整数 r について $K_G{}^r(X)$ が定義できるので，$K_G{}^*(X)=\sum K_G{}^r(X)$ とおく．このとき，次のことが成り立つのは容易に確かめられる：

(22.1)　$G=\{e\}\Longrightarrow K_G{}^*(X)=K^*(X)$

(22.2)　$G\supset H$ ：閉部分群$\Longrightarrow K_G{}^*(G/H)\cong R(H)$

特に，$K_G{}^*(G)\cong \boldsymbol{Z}$,　$K_G{}^*(1\text{点})\cong R(G)$

(22.3) X が自由 G-空間 $\Longrightarrow K_G^*(X) \cong K^*(X/G)$.

特に，G が $X \times G$ に対角に作用しているときは，$K_G^*(X \times G) \cong K^*(X)$.

G-空間 X, Y に対して Hodgkin [8, 9] は次の性質をみたすスペクトル系列 $\{E_r^{*,*}(X, Y)\}$ を構成している：

$$E_2^{*,*}(X, Y) = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,*}(K_G^*(X), K_G^*(Y)) \Longrightarrow F_G^*(X, Y)$$

ただし，自然な変換 $\lambda: F_G^*(X, Y) \to K_G^*(X \times Y)$ が存在し，この λ は，X または Y が自由 G-空間のとき同型である．特に，$X=G$，$Y=G/H$ のとき，このスペクトル系列は次の形になる：

$$E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(H)) \Longrightarrow K^*(G/H)$$

G はコンパクト連結 Lie 群，$\pi_1(G)$ は torsion なし，H は G の連結閉部分群，T は H の極大トーラスとし，$i: T \to H$ は射入とする．自然な射影 $G/T \to G/H$ はスペクトル系列の対応 $\{\varphi_r\}: \{E_r(G, G/H)\} \to \{E_r(G, G/T)\}$ を誘導する．ここで，$R(H)$ は $R(G)$-加群として $R(T)$ の直和因子であるから $i^*: R(H) \to R(T)$ は単射 $\Longrightarrow \varphi_2 = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,*}(1, i^*)$ も単射．従って

補題 23 $E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(T)) \Longrightarrow K^*(G/T)$ が自明ならば $E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(H)) \Longrightarrow K^*(G/H)$ も自明である．

G のユニタリー表現 $\rho_i: G \to U(n_i)$ を適当にとることにより G を $U = \prod U(n_i)$ に埋め込んで $(j: G \to U)$，$j^*: R(U) \to R(G)$ が全射になるようにする．このとき次の補題が成り立つ：

補題 24 $E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(U)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(T)) \Longrightarrow K^*(U/T)$ が自明ならば $E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(T)) \Longrightarrow K^*(G/T)$ も自明である．

ここで $H^*(BU)$，$H^*(BT)$ はいずれも多項式環であるから Snaith の結果 (Theorem 5.5 of [12] II) を適用できて，$E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(T)) \Longrightarrow K^*(U/T)$ は自明であることがわかる．従って

定理 25 G はコンパクト連結 Lie 群，$\pi_1(G)$ は torsion なし，H は連結閉部分群のとき，次のスペクトル系列は自明である：

$$E_2^{*,0} = \mathrm{Tor}_{R(G)}^{*,0}(\boldsymbol{Z}, R(H)) \Longrightarrow K^*(G/H)$$

η を G/H の標準 H-バンドルする．H-加群 V に対して，V がファイバーである η に同伴なベクトルバンドルの表わす $K^0(G/H)$ の元を $\alpha(V)$ と書くことにより，η は環の準同型 $\alpha: R(H) \to K^0(G/H)$ を与える．α は，明らかに，

$$\alpha : R(H) \longrightarrow \boldsymbol{Z} \underset{R(G)}{\otimes} R(H) \longrightarrow K^0(G/H)$$

と分解する．このとき，$\boldsymbol{Z} \underset{R(G)}{\otimes} R(H) \to K^0(G/H)$ も同じ α で表わすことにする．

$\rho_i : G \to U(n)$ $(i=1, 2)$ が G の表現で $\rho_1|H = \rho_2|H$ をみたすとき写像

$$f : G/H \longrightarrow U(n) \Longleftrightarrow f(gH) = \rho_1(g)\rho_2(g)^{-1}$$

は $K^{-1}(G/H)$ の元を定義するが，これを $\beta(\rho_1 - \rho_2)$ と表わす．

これらの記号を使うと，Minami の結果 [10] は次のように述べられる：

定理 26　G は involution σ をもつコンパクト 1-連結 Lie 群，K は σ の固定点からなる部分群，即ち G/K は対称空間とするとき，

(1)　次の条件をみたす $R(G)$ の元 $\rho_1, \cdots, \rho_l$ が存在する：

ある r が存在して $\sigma^*(\rho_k) = \rho_k$ $(r+1 \leq k \leq l)$,

$$R(G) = \boldsymbol{Z}[\rho_1, \cdots, \rho_r, \sigma^*(\rho_1), \cdots, \sigma^*(\rho_r), \rho_{r+1}, \cdots, \rho_l]$$

(2)　$\alpha : \boldsymbol{Z} \underset{R(G)}{\otimes} R(K) \to K^0(G/K)$ は単射で

$$K^*(G/K) \cong \Lambda(\beta(\rho_1 - \sigma^*(\rho_1)), \cdots, \beta(\rho_r - \sigma^*(\rho_r))) \otimes (\boldsymbol{Z} \underset{R(G)}{\otimes} R(K))$$

(3)　$K^*(G/K)$ は torsion なし．

同様な結果を Pittie[11] もえているが，証明は代数的なものである：

定理 27　G はコンパクト連結 Lie 群，U は最大階数連結閉部分群とすると $\alpha : R(U) \to K^0(G/U)$ は全射で，同型 $K^*(G/U) \cong \boldsymbol{Z} \underset{R(G)}{\otimes} R(U)$ を与える．

以上の詳細は次の文献を参照されたい．

[8]　L. Hodgkin : An equivariant Künneth formula in K-theory, Univ. of Warwick, 1968 (mimeographed notes),

[9]　L. Hodgkin : Künneth formula spectral sequence, Univ. of London College, 1972 (mimeographed notes),

[10]　H. Minami : K-groups of symmetric spaces, I, II, Osaka J. Math., 12(1975), 623-624; 13(1976), 271-287,

[11]　H.V. Pittie : Homogeneous vector bundles on homogeneous spaces, Topology, 11(1972), 199-203,

[12]　V. P. Snaith : Massey products in K-theory, I, II, Proc. Camb. Phil. Soc., 68(1970), 303-320; 69(1971), 259-289.

以上は，元来第 8 章として登場してくる筈であったが，紙数の関係で割愛したものである．

なお，ホモトピー，コホモロジー，(コ)ボルディズムについて若干の参考文献を補足する．

ホモトピー

G は 1-連結，単純 Lie 群とする．第4章§6の p-正則性を一般化した**準 p-正則性**については次の論文を参照されたい：

[13] M. Mimura - H. Toda : Cohomology operations and the homotopy of compact Lie groups, I, Topology, 9(1970), 317-336,

[14] S. Oka : On the homotopy groups of sphere bundles over spheres, J. Sci. Hiroshima Univ., 33(1966), 161-195.

一般に次のように定義する：

G が r 個の空間に **p-分解**する $\Longleftrightarrow \tilde{H}^*(X_i;\boldsymbol{Z}_p)\neq 0$ をみたす 1-連結 CW-複体 X_i, $1\leq i\leq r$, と p-同値 $f:\prod X_i\to G$ が存在する．

さらに，各 X_i が p-分解できぬとき，**既約 p-分解**ということにする．次の定理は [15] において証明されている．

定理 28 $H_*(G)$ は p-torsion をもたず，G の型は $(2m_l+1,\cdots,2m_l+1)$, $r(G)$ $=$(相異なる m_i mod $(p-1)$ の個数) とする．$G\neq\mathrm{Spin}(2n)$ のとき，G は $r(G)$ 個の空間に既約 p-分解する．$G=\mathrm{Spin}(2n)$ のときは $r(G)+1$ 個の空間に既約 p-分解する．

[15] M. Mimura - G. Nishida - H. Toda : Mod p decomposion of compact Lie groups, Publ. RIMS of Kyoto Univ., 13(1977), 627-680.

G の準安定領域のホモトピー群については次の論文がある：

[16] M.G. Barratt - M.E. Mahowald : The metastable homotopy of $O(n)$, Bull AMS, 69(1963), 531-533,

[17] H. Imanishi : Unstable homotopy groups of classical groups (odd primary components), J. Math. Kyoto Univ., 7(1967), 221-243,

[18] M.A. Kervaire : Some nonstable homotopy groups of Lie groups, Ill J. Math., 4(1960), 161-169.

これは次の Paechter の計算から導きだしたものである：

[19] G.F. Paechter : The groups $\pi_r(V_{n,m})$, I, II, III, IV, V, Quart. J. Math., Oxford (2) 7(1956), 249-268 ; 9(1958), 8-27 ; 10(1959), 17-37 ;

241-260; 11(1960), 1-16.

なお，$\pi_{2n+i}(U(n))$, $3\leq i\leq 7$, を計算した Matsunaga の一連の論文が Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 15, 16, 17 に出ていることを附記しておこう．

G の非安定ホモトピー群については，戸田－三村「ホモトピー論」第10章を参照されたい(文献も記されている)．さらに，例外群については

[20] H. Kachi: The homotopy groups of compact Lie groups E_6, E_7 and E_8, Nagoya Math. J., 32(1968), 109-139,

[21] 戸田宏－三村護－今西英器－可知偉行：Homotopy groups of Lie groups, 京都大学数理解析研究所講究録, 21(1967), 1-19.

(一般)コホモロジー

(例外)Lie群の等質空間のコホモロジーについては次のものを参照されたい．

[22] K. Ishitoya: Integral cohomology ring of the symmetric space E II, J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 375-397,

[23] K. Ishitoya-H. Toda: On the cohomology of irreducible symmetric spaces of exceptional type, ibid, 17(1977), 225-243,

[24] H. Toda: On the cohomology rings of some homogeneous spaces, ibid, 15(1975), 185-199,

[25] H. Toda - T. Watanabe: The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T, ibid, 14(1974), 257-286,

[26] T. Watanabe: The integral cohomology ring of the symmetric space E VII, ibid, 15(1975), 363-385.

Lie 群のコホモロジーの Hopf 代数構造については，

[27] P.F. Baum - W. Browder: The cohomology of quotients of classical groups, Topology, 3(1965), 305-336,

[28] K. Ishitoya - A. Kono - H. Toda: Hopf algebra structure of mod 2 cohomology of simple Lie groups, Publ. RIMS of Kyoto Univ., 12(1976), 141-167,

[29] A. Kono: Hopf algebra structure of simple Lie groups, J. Math. Kyoto Univ., 17(1977), 259-298,

[30] A. Kono - M. Mimura: Cohomology mod 2 of the classifying space of the compact connected Lie groups of type E_6, J. Pure and Applied Alg., 6(1975), 61-81,

[31] A. Kono - M. Mimura: Cohomology operations and the Hopf algebra structure of the compact, exceptional Lie groups E_7 and E_8, Proc. London Math. Soc., 35(1977), 345-358,

[32] A. Kono - M. Mimura - N. Shimada: On the cohomology mod 2 of the classifying space of the 1-connected exceptional Lie groups E_7, J. Pure and Applied Alg., 8(1976), 267-283.

例外 Lie 群の分類空間のコホモロジーについては，上の [30]，[32] および次のものがある：

[33] H. Toda: Cohomology mod 3 of the classifying space BF_4 of the exceptional group F_4, J. Math. Kyoto Univ., 13(1973), 97-115.

Lie 群の(コ)ボルディズムについては次の論文を参照されたい：

[34] T. Petrie: The weakly complex bordism of Lie groups, Ann. Math., 88(1968), 371-402.

さて，話は些か前後するが下巻の各章の参考文献を挙げることにしよう．

第5章

G をコンパクト群とするとき，G 上の積分，G の表現等については，

[35] G.E. Bredon: Introduction to compact transformation groups, Academic Press, 1972

に簡潔な要約があるが，詳細はやはり

[36] C. Chevalley: Theory of Lie groups, Princeton Univ. Press, 1946

を参照されたい．

[37] ポントリャーギン：連続群論，上，下，(杉浦・柴岡・高崎訳)，岩波書店

も一読の価値があろう．

Lie 群 G の極大トーラス，root, Weyl 群等に関する本章と同様な議論は [1]

に平易で読みやすく書かれている．なお，単純群 G の root 系(正 root，基本 root，dominant root，基本 weight 等)の一覧表が

［38］ ブルバキ：数学原論，リー群とリー環 3，(杉浦訳)，東京図書

の巻末にあることを附記しておく．

Dynkin 図式の分類は様々の Lie 環の本に詳しいが，例えば

［39］ G.D. Mostow: Lectures on Lie groups and Lie algebras, Yale Univ. (mimeographed notes)

には非常に丁寧に書かれている．

本章の整格子 $\Gamma(G)$ と基本群 $\pi_1(G)$ の関係についての証明は，ほぼ

［40］ O. Loos: Symmetric spaces, II: Compact spaces and classification, W.A. Benjamin 1969

の線に沿っている．

§7 の最大階数部分群を調べる議論は次に依るものである．

［41］ A. Borel - J. de Siebenthal: Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos, Comment. Helv., 23(1949), 200–221

第 6 章

いわゆる Morse の理論については次のものを参照されたい．

［42］ M. Morse: The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc., 1934

［43］ H. Seifert - W. Threlfall: Variationsrechnung im Grossen, Teubner, 1938.

この Morse の理論の古典群の周期性への応用についての解説書としては

［44］ ミルナー：モース理論，(志賀訳)，吉岡書店，

［45］ 長野正：大域変分法，共立講座，現代の数学 17, 1971

があるが，Bott の論文

［46］ R. Bott: An application of the Morse theory to the topology of Lie groups, Bull. Soc. Math. France, 84(1956), 251–281,

［47］ R. Bott: The stable homotopy of the classical groups, Ann. Math., 70(1959), 313–337,

[48] R. Bott: The periodicity theorem for the classical groups and some of its applications, Advances in Math., 4(1970), 353-411

を読むのも意義があろう(最後のものは解説書である).

Bott-Samelson の理論および応用については，次を参考にしてほしい:

[49] R. Bott-H. Samelson: Applications of the theory of Morse to symmetric spaces, Amer. J. Math., 80(1958), 964-1029

第7章

Hopf 代数，Lie 群(H-空間)のコホモロジーに関する種々の事実については

[50] A. Borel: Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts, Ann. Math., 57 (1954), 115-207,

[51] A. Borel: Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes, Amer. J. Math., 76(1954), 273-342,

[52] A. Borel: Topics in the homology theory of fibre bundles, Lecture notes in Math. 36, Springer 1967

を参照されたい.

また，§3 や第5章§3 で証明なしに引用した Lefschetz の不動点定理の証明は，例えば

[53] 中岡稔:位相幾何学(ホモロジー論)，共立講座，現代の数学 15，1970

を参照されたい. コホモロジー作用素および Eilenberg-MacLane 空間のコホモロジーについては

[54] Seminaire de Cartan 7(1954/55): Algèbres d'Eilenberg-MacLane et homotopie

を読むのもおもしろいのではなかろうか.

例外群のコホモロジー決定の歴史については，

[55] 荒木捷朗:コンパクト例外群の mod p コホモロジー，数学 14(1963), 219-235

を読むのが最良であろう. 本章とは異なる計算方法が見通しよく述べられており，末尾に豊富な参考文献がある.

索　引

タ　行

ハ　行

著　　者

戸田　宏（とだ　ひろし）

1928年1月神戸市に生まれる．1951年大阪大学理学部数学科卒業．大阪市立大学理工学部助手，同講師，京都大学理学部助教授を経て，現在，京都大学理学部教授．

三村　護（みむら　まもる）

1938年1月香川県高松市に生まれる．1960年京都大学理学部数学科卒業．京都大学理学部助手を経て，現在，京都大学教養部助教授．

リ ー 群 の 位 相（下）

定価 5800円

1979年8月31日　第1刷発行
1985年7月31日　第2刷発行

発行所　株式会社 紀伊國屋書店
東京都新宿区新宿3の17の7
電話 (354) 0131 (代表)
振替口座 東京 9-125575

出版部　東京都世田谷区桜丘5-38-1
電話 (439) 0125 (代表)
郵便番号 156

ISBN 4-314-00238-7 C 3341
PRINTED IN JAPAN

印刷　研究社印刷
製本　三水舎

紀伊國屋数学叢書について

数学を学ぶにはいろいろの段階があるが，いずれの場合でも書物などによって自学自習することが最も重要であり，単に講義を聞くというような受動的な勉強だけでは，はなはだ不十分である．

みずから学ぶために現在いろいろな数学書が出版されている．しかし，数学の進歩は極めて基礎的な考え方に対してさえ常に影響を与えており，従ってどのような段階の勉強であっても，常に新しい考え方を理解することが必要である．このためには，数学の過去と将来とを結ぶ視点から書かれた書物が数多く出版されることが望ましい．即ち，新しい視点と古典的な視点とを見くらべ，基本的なことをも将来の発展を考慮した視点から説明するという立場で書かれた書物が要望されている．

本叢書はこのような要望に応えて企画されたものであって，各巻が大学理工学系の専門課程の学生または大学院学生がそれぞれの分野での話題，対象について入門の段階からある程度の深さまで勉学するための伴侶となることを目指している．このために我々は各巻の話題の選択について，十分配慮し，現代数学の発展にとって重要であり，また既刊書で必ずしも重点が置かれていないものを選び，各分野の第一線で活躍しておられる数学者に執筆をお願いしている．

学生諸君および数学同好の方々が，この叢書によって数学の種々の分野における基本的な考え方を理解し，また基礎的な知識を会得することを期待するとともに，更に現代数学の最先端へ向かおうとする場合の基礎ともなることを望みたい．